ALGEBRA
BERNAYS
SVEUČILIŠTE

MATEMATIČKA ANALIZA

Logaritamsko deriviranje

Implicitno zadane funkcije

Jednadžbu pravca možemo zapisati na dva načina:

1. Eksplicitna jednadžba pravca

$$y = k\,x + l \qquad \text{na primjer: } y = -2x + 3$$

2. Implicitna jednadžba pravca

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{na primjer: } 2x + y - 3 = 0$$

Implicitno zadane funkcije

Funkcije se općenito mogu pisati na ta dva oblika:

1. Eksplicitna jednadžba funkcija

$$y = f(x)$$ na primjer: $y = \sqrt{1 - x^2}$

2. Implicitna jednadžba funkcije

$$f(x, y) = 0$$ na primjer: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Implicitno zadane funkcije

Mi ćemo promatrati samo implicitno zadane funkcije koje su oblika:

$$f(y) = g(x)$$

Na primjer, funkciju čiji je graf jedinična kružnica bi u tom obliku zapisali kao: $y^2 = 1 - x^2$

Implicitno zadane funkcije

Kako deriviramo tako zapisanu funkciju?

$$f(y) = g(x)$$

Lijevu stranu te jednadžbe promatramo kao kompoziciju funkcija f i y, te ju tako i deriviramo

$$f\big(y(x)\big) = g(x)$$

$$f'(y) \cdot y' = g'(x) \qquad\qquad y' = \frac{g'(x)}{f'(y)}$$

Implicitno zadana funkcija

Odredite derivaciju na elipsu $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ u točki $T(2,1)$.

$$y^2 = 3 - \frac{x^2}{2}$$

$$2y \cdot y' = -\frac{1}{2} \cdot 2x \qquad y' = -\frac{x}{2y} \qquad y'(T) = -1$$

Logaritamska derivacija

Derivaciju implicitno zadanih funkcija koristiti ćemo u postupku koji nazivamo logaritamsko deriviranje.

Taj postupak koristimo za određivanje derivacija funkcija koje i u bazi i u eksponentu imaju varijablu x.

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Na primjer: $y = x^x$, $y = (\sin x)^{\ln x}$, ...

Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije $y = x^x$.

1. Funkciju logaritmiramo

$$\ln y = \ln x^x$$

2. Spustimo potenciju ispred logaritma

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

3. Deriviramo dobivenu implicitnu funkciju

Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije $y = x^x$.

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$$

Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije $y = x^x$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$$

Na kraju, jednadžbu pomnožimo s y:

$$y' = y \cdot (\ln x + 1) \qquad y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\sqrt{x}} \qquad \ln y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sin x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\sqrt{x})' \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot (\ln(\sin x))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x$$

Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \operatorname{ctg} x \right)$$

$$y' = (\sin x)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \operatorname{ctg} x \right)$$

Derivacije višeg reda

Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki otvorenog intervala I onda znamo da je dobro definirana funkcija

$$f \to f'(x)$$

Ako u točki x_0 postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$$

kažemo da funkcija f ima drugu derivaciju u točki x_0 koju označavamo $f''(x_0)$.

Derivacije višeg reda

Definirano je preslikavanje $x_0 \to f''(x_0)$ za koje vrijedi:

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

Analogno se definiraju i derivacije višeg reda:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Rekurzivna definicija derivacija višeg reda.

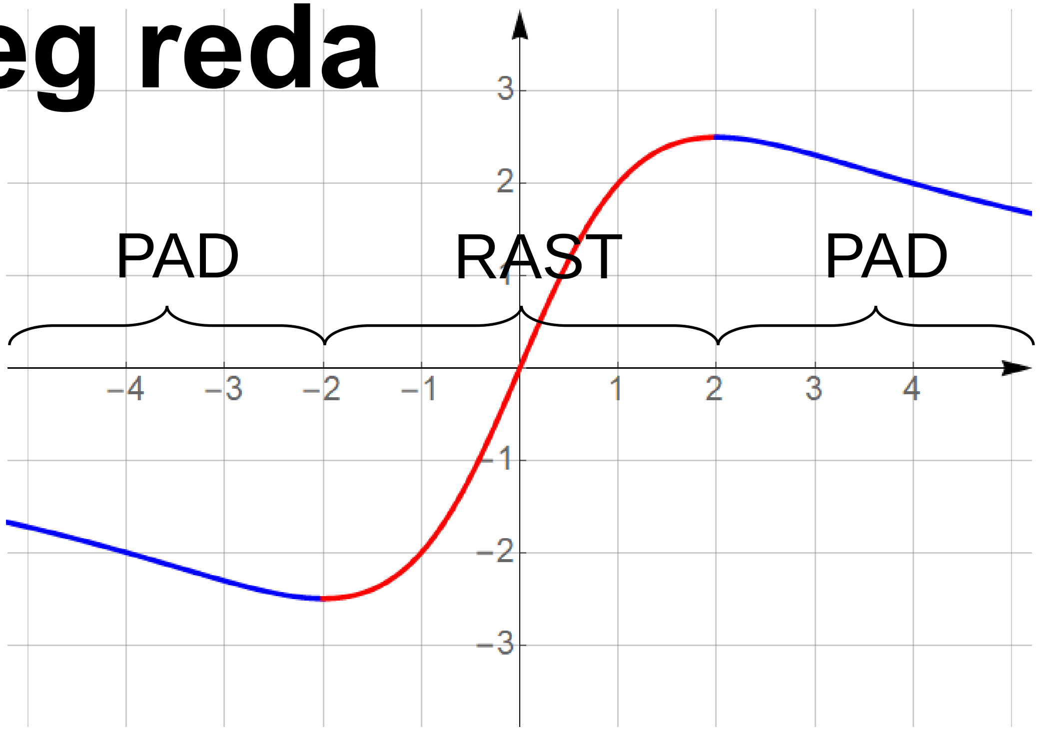
Derivacije višeg reda

Interpretacije derivacija višeg reda u fizici (kinematici):

- funkcija $x(t)$ mjeri **položaj** točke u trenutku t
- funkcija $v(t) = x'(t)$ mjeri **brzinu** točke u trenutku t
- funkcija $a(t) = x''(t)$ mjeri **ubrzanje** točke u trenutku t
- funkcija $j(t) = x'''(t)$ mjeri **trzaj** točke u trenutku t

Derivacije višeg reda

Interpretacija derivacija u geometriji:



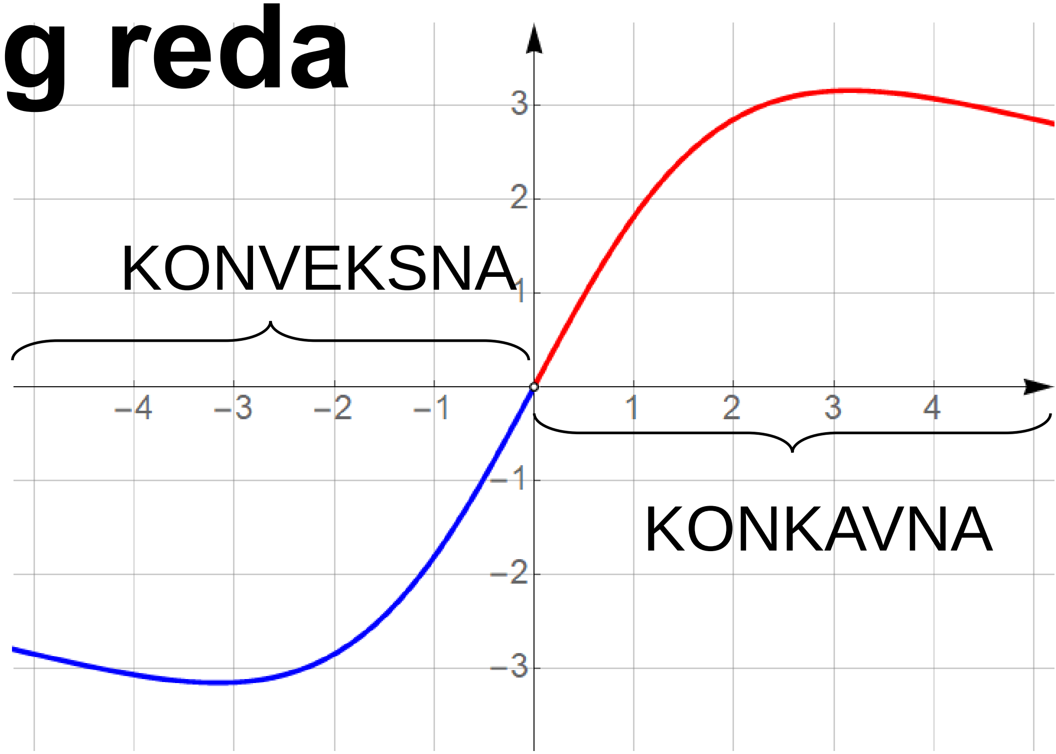
Na grafu funkcije $y = f(x)$ prva derivacija funkcije određuje **intervale rasta i pada**.

$$f'(x) > 0,\ f(x) \text{ raste}$$

$$f'(x) < 0,\ f(x) \text{ pada}$$

Derivacije višeg reda

Interpretacija derivacija višeg reda u geometriji:



Na grafu funkcije $y = f(x)$ druga derivacija funkcije određuje **intervale zakrivljenosti**.

$f''(x) > 0$, konveksna

$f''(x) < 0$, konkavna

Derivacije višeg reda

Primjer 1. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 4$$

Rješenje:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

$$f^{iv}(x) = 24$$

$$f'''(x) = 24x - 12$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \qquad \forall n, n \geq 5$$

Derivacije višeg reda

Primjer 2. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(x) = -1 \cdot x^{-2}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

Derivacije višeg reda

Primjer 3. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$$

$$f''(x) = 4 \cdot e^{2x}$$

$$f'''(x) = 8 \cdot e^{2x}$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$$

Derivacije višeg reda

Primjer 4. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \mathrm{MOD}(n,4) = 0 \\ \cos x, & \mathrm{MOD}(n,4) = 1 \\ -\sin x, & \mathrm{MOD}(n,4) = 2 \\ -\cos x, & \mathrm{MOD}(n,4) = 3 \end{cases}$$

Hvala ☺