ALGEBRA
BERNAYS
SVEUČILIŠTE

MATEMATIČKA ANALIZA

L'Hospitalovo pravilo, tangenta i normala

L’Hospitalovo pravilo

Derivacije se primjenjuju u rješavanju mnogih problema. Neke od njih ćemo obraditi u slijedeća četiri tjedna.

Prva primjena koju obrađujemo jest način za rješavanje limesa uz pomoć derivacija.

L’Hospitalovo pravilo

Guillaume de l’Hospital (1661-1704)

- francuski matematičar
- objavio prvi priručnik (udžbenik) za upotrebu diferencijalnog računa

Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hôpital, Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont, and Seigneur d'Ouques-la-Chaise

L’Hospitalovo pravilo

„Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes”

„Analiza beskonačno malog kako bi se razumjele krivulje”

L’Hospital i Johann Bernoulli:

https://www.youtube.com/watch?v=G6Cou-9clDo

L'Hospitalovo pravilo

Pravilo za računanje limesa funkcije kada se javljaju neodređeni oblici:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$

L’Hospitalovo pravilo

Ako su ispunjene pretpostavke:

- funkcije $f(x)$ i $g(x)$ su derivabilne u svakoj točki nekog otvorenog intervala oko točke a, $\langle a-\delta, a+\delta\rangle$ osim možda u točki a.
- $g(x) \neq 0$ u svim točkama tog intervala
- ako postoji

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ALGEBRA

L'Hospitalovo pravilo

- limes $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ je neodređenog oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Tada vrijedi:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Iako je pravilo ovdje iskazano za $a \in \mathbb{R}$, može se dokazati da vrijedi i za $a = \pm\infty$

Primjer 1. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$$

Rješenje: bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}\;\frac{:x^2}{:x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}=\left(\frac{1-0-0}{1-0-0}\right)=1$$

Primjer 1. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$$

Rješenje: uz pomoć L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = L'H$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{2x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 1$$

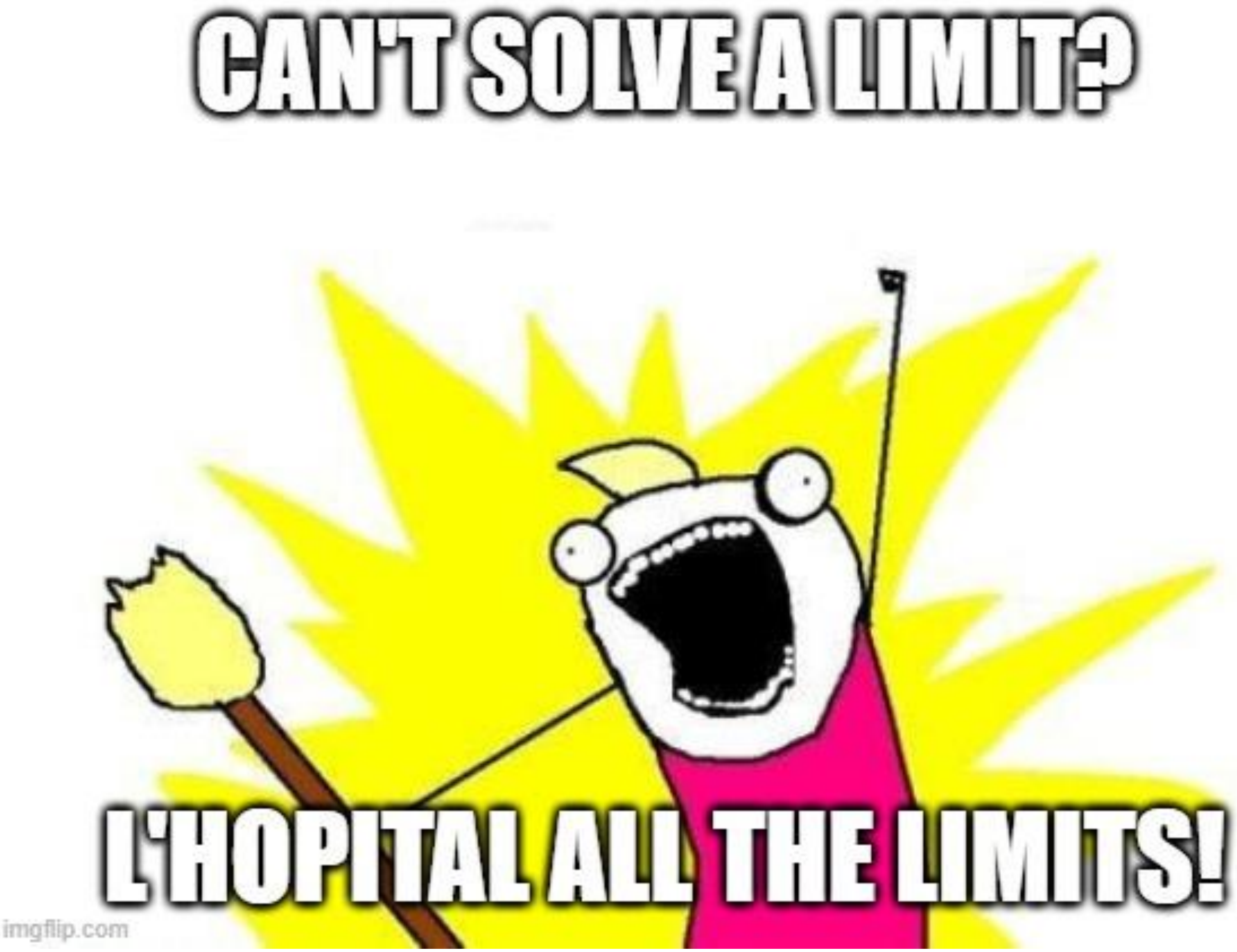
Primjer 2. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$$

Rješenje: uz pomoć L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \left(\frac{1-1}{\sin 0}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = L'H$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2 \cdot \cos 2x} = \left(\frac{1}{2 \cdot \cos 0}\right) = \frac{1}{2}$$


CAN'T SOLVE A LIMIT?
L'HOPITAL ALL THE LIMITS!
imgflip.com


ONE DOES NOT SIMPLY
USE L'HOPITAL RULE
imgflip.com

Primjer 3. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

Rješenje: uz pomoć L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \left(\frac{0^2}{\sin 0}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = L'H = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{2x\cdot\cos x^2}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = L'H = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x^2 - 2x^2\cdot\sin x^2} = \left(\frac{1-0}{1-0}\right) = 1$$

Primjer 3. Izračunajte limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

Rješenje: bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} = (1 \cdot 1) = 1$$

Primjer 4. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$$

Rješenje: pomoću L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty+0}\right) = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty-0}\right) = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$$

Ne može se riješiti pomoću L'Hospitalovog pravila.

Primjer 4. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

Rješenje: bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty + 0}\right) \quad \frac{: e^x}{: e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - e^{-x-x}} = \left(\frac{1}{1-0}\right) = 1$$

ALGEBRA

Složenost algoritama

Složenost algoritma je mjera vremenskih ili memorijskih zahtjeva potrebnih za izvršavanje nekog algoritma u odnosu na veličinu ulaznog podatka, n.

$$T(n) = n, \quad T(n) = n\log n, \quad T(n) = n^2, \quad T(n) = 2^n$$

„Big O" notacija:

$$O(n), \qquad O(n\log n), \qquad O(n^2), \qquad O(2^n),$$

Složenost algoritama

$O(n)$ - linearno pretraživanje niza

$O(n \log n)$ - merge sort

$O(n^2)$, - bubble sort

$O(n^3)$, - naivno množenje matrica

$O(2^n)$, - problem trgovačkog putnika

Složenost algoritama

Kako bi usporedili složenost dva algoritma, $T_1(n)$ i $T_2(n)$, računamo limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1(n)}{T_2(n)}$$

- $= 0$ - algoritam T_1 ima manju složenost
- $= c \neq 0$ - T_1 i T_2 imaju jednaku složenost
- $= \infty$ - algoritam T_2 ima manju složenost

Složenost algoritama

Usporedite složenost $T_1(n) = n \log n$ i $T_2(n) = n^2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1(n)}{T_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \log n}{\cancel{n}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = L'H = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Algoritam $T_1(n)$ ima manju složenost.

$$O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n)$$

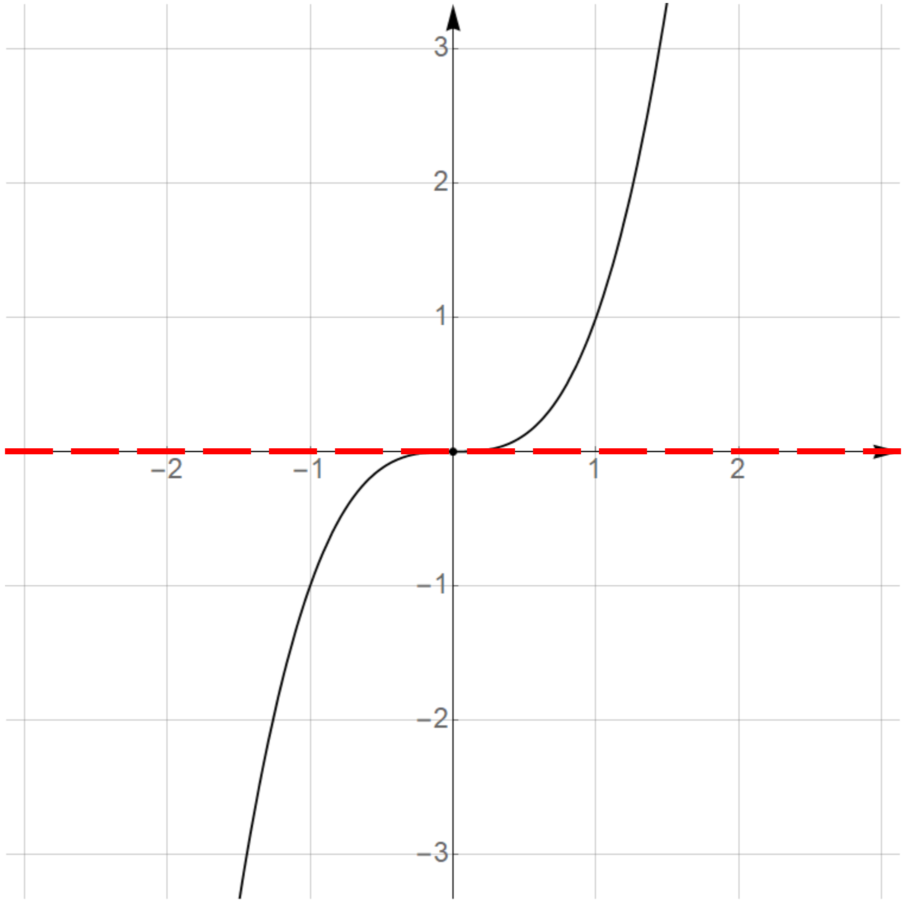
Tangenta

Što je tangenta? ~~Pravac koji *dira* krivulju u jednoj točki.~~

Tangenta na graf $y = x^3$
u ishodištu?

Pravac $y = 0$.

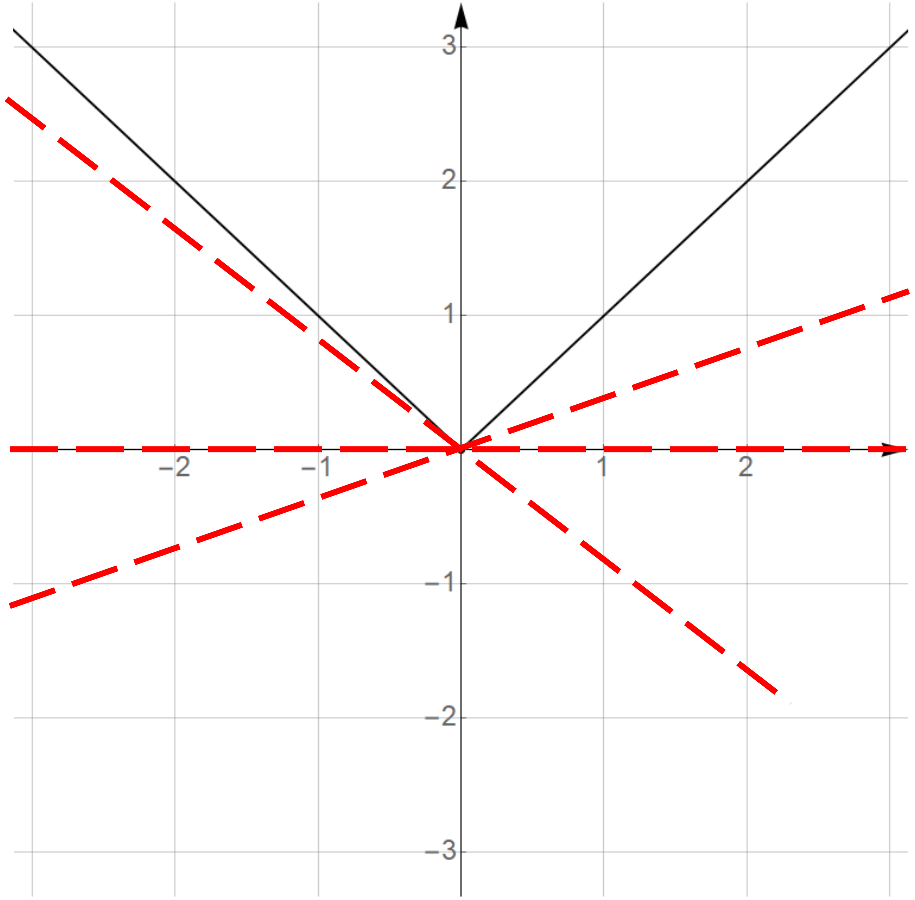
Tangenta ne *dira* graf,
već ga siječe!



Tangenta

Što je tangenta? ~~Pravac koji *dira* krivulju u jednoj točki.~~

Tangenta na graf $y = |x|$ u ishodištu?



Puno pravaca *dira* graf krivulje, ali niti jedan nije tangenta!

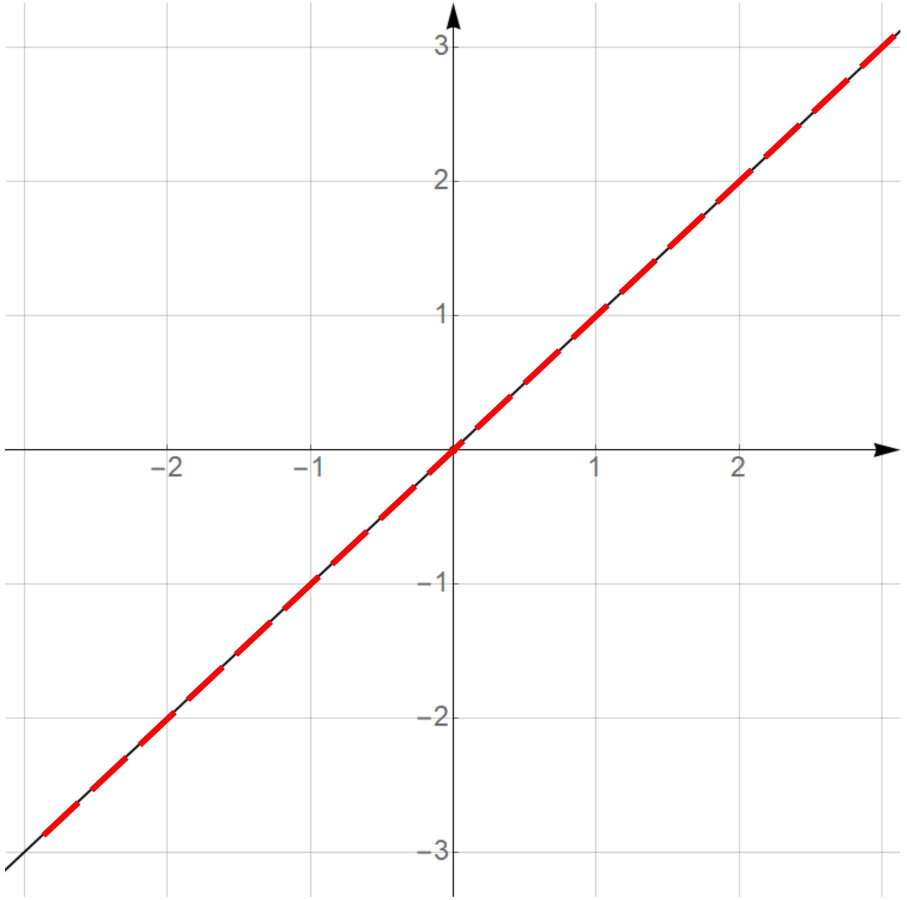
Tangenta

Što je tangenta? ~~Pravac koji *dira* krivulju u jednoj točki.~~

Tangenta na graf $y = x$
u ishodištu?

Tangenta je pravac $y = x$.

Tangenta ne *dira graf u jednoj točki*, već su im sve točke zajedničke.



Tangenta

Što je tangenta?

Tangenta je najbolja linearna aproksimacija.

Tangenta je pravac $p(x)$, takav da za svaki drugi pravac $q(x)$ na nekoj okolini oko točke x_0 vrijedi:

$$|p(x) - f(x)| \leq |q(x) - f(x)|.$$

Tangenta

Ponekad tangenta ima *svojstvo* da dira neke tipove krivulja u samo jednoj točki:

- kružnicu, elipsu, hiperbolu

Kod definicije derivacije smo vidjeli vezu tangente i derivacije: nagib tangente na graf funkcije $y = f(x)$ jednak je derivaciji funkcije u točki $T(x_0, y_0)$.

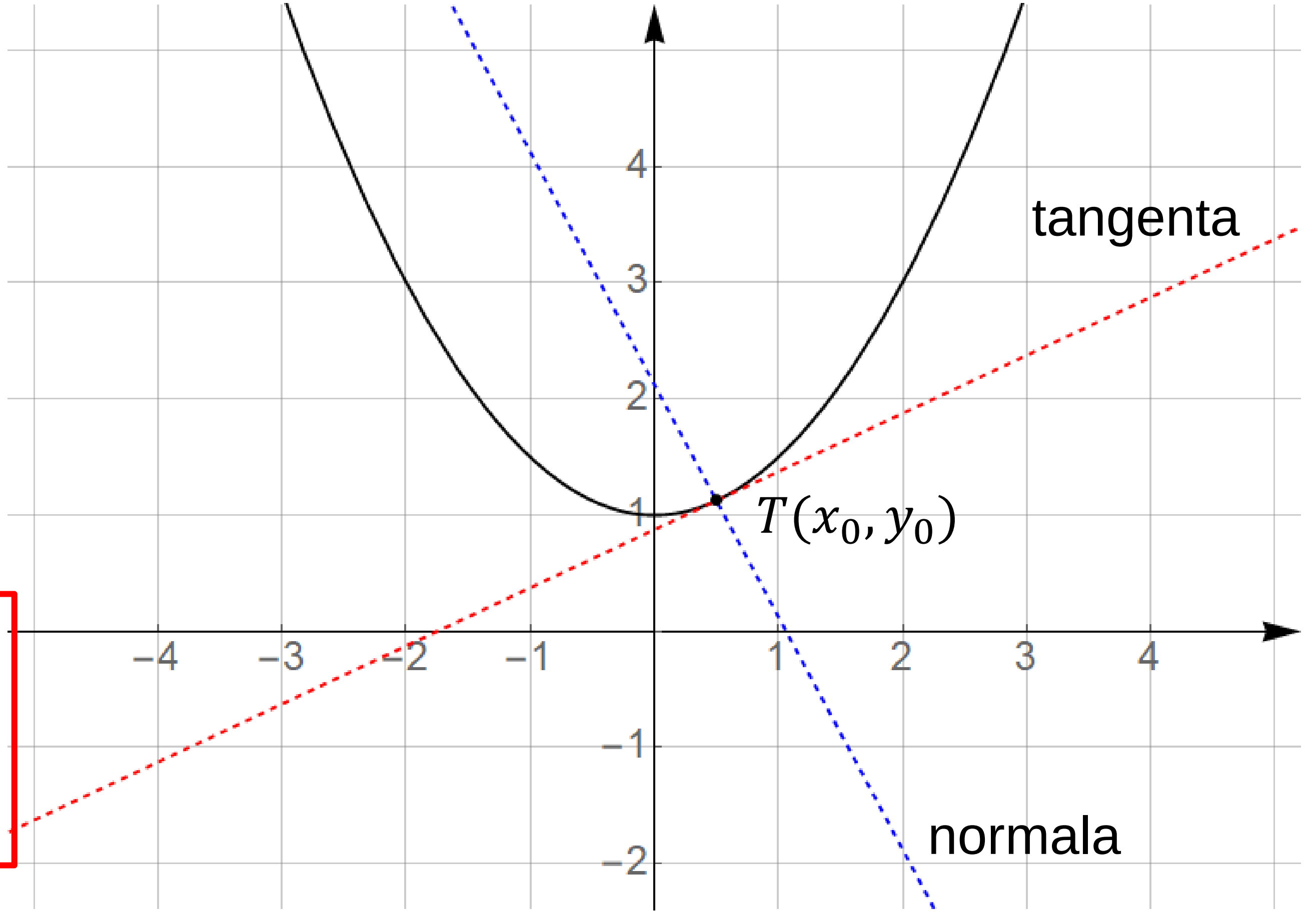
$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

ALGEBRA

Normala

Normala na graf funkcije $f(x)$ je pravac okomit na tangentu u točki $T(x_0, y_0)$.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$



Tangenta i normala

Nađite jednadžbu tangenti povučenih na funkciju $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ u točkama gdje dana funkcija siječe koordinate osi.

$$x = 0 \ \rightarrow \ T_1\,(0,2)$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$f'(0) = \frac{2}{(0-2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 0)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Tangenta i normala

Nađite jednadžbu tangenti povučenih na funkciju $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ u točkama gdje dana funkcija siječe koordinate osi.

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad T_1\,(4,0)$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$f'(0) = \frac{2}{(4-2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

Tangenta i normala

Pronađite normalu na graf funkcije $f(x) = x^2 - 2$ koja je okomita na pravac $4x - y + 1 = 0$.

$$f'(x) = 2x$$

$$k_N = -\frac{1}{k_p}$$

$$-\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$k_N = -\frac{1}{2x}$$

$$x_0 = 2 \qquad y_0 = 2 \qquad k_N = -\frac{1}{4}$$

$$y = 4x + 1 \qquad k_p = 4$$

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

Tangenta i normala

Odredite tangentu i normalu na graf funkcije $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ u točki s x-koordinatom $x_0 = 1$.

$$f(1) = 2 \qquad f(x) = 2\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$T(1,2) \qquad f'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Tangenta i normala

Odredite tangentu i normalu na graf funkcije $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ u točki s x-koordinatom $x_0=1$.

$T(1,2)$

$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$k_T=f'(1)=-1$

$y-2=-1(x-1)$

$y=-x+3$

tangenta

$k_N=1$

$y-2=1(x-1)$

$y=x+1$

normala

Video materijali

Aleksandar Hatzivelkos:

1. Limesi: https://www.youtube.com/watch?v=wiik7Nh75gg
2. L'Hospitalovo pravilo:
   https://www.youtube.com/watch?v=IfHzipW9AEc
   https://www.youtube.com/watch?v=wZeZgDlW3dU
3. Tangenta:

   https://www.youtube.com/watch?v=wZeZgDlW3dU (teorija)
   https://www.youtube.com/watch?v=Q1X-bl6wo5I
   https://www.youtube.com/watch?v=XnbTw8hhzSw

Hvala ☺