ALGEBRA BERNAYS SVEUČILIŠTE

MATEMATIČKA ANALIZA

Tok funkcije

Intervali monotonosti

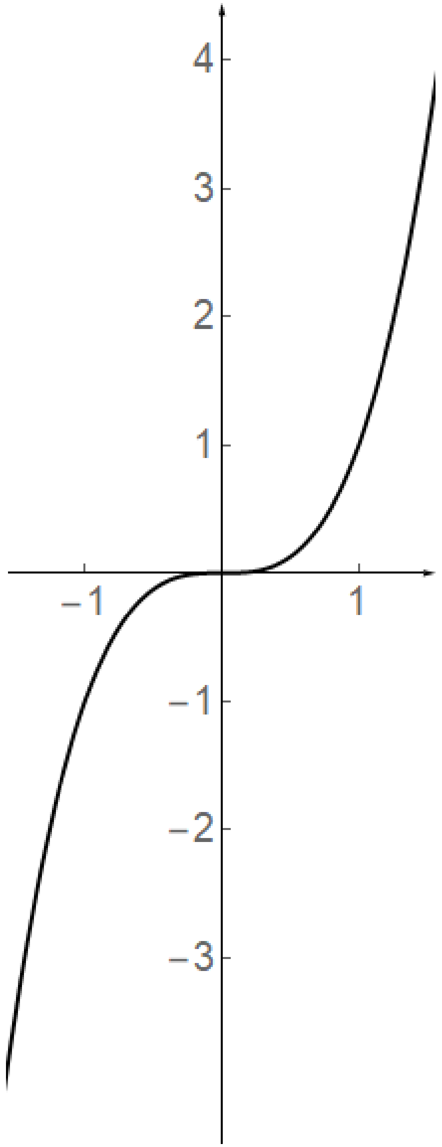
Rastuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$

Kada **raste** varijabla $x \in I$, tada **raste** i vrijednost funkcije $f(x)$ na tom intervalu I.

Strogo rastuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$



Intervali monotonosti

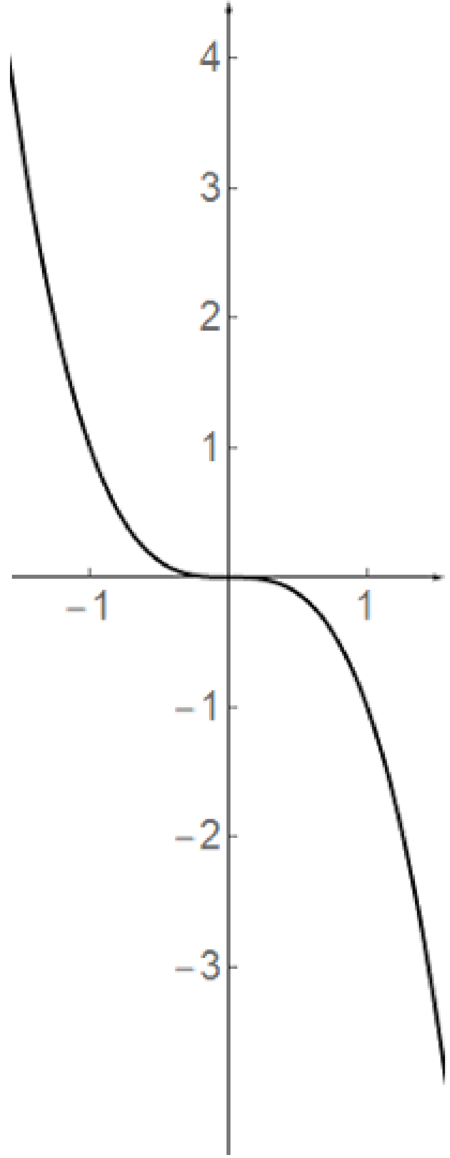
Padajuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$$

Kada **raste** varijabla $x \in I$, tada **pada** vrijednost funkcije $f(x)$ na tom intervalu I.

Strogo padajuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$



Intervali monotonosti

Za funkciju koja (strogo) raste ili (strogo) pada na cijelom intervalu I, kažemo da je **(strogo) monotona** na intervalu I.

Kriterij monotonosti funkcije:

- predznak prve derivacije funkcije, $f'(x)$ se ne mijenja na promatranom intervalu I.

Intervali monotonosti

Na intervalima na kojima je predznak prve derivacije funkcije pozitivan, funkcija je rastuća.

Interval rasta funkcije je rješenje nejednadžbe:

$$f'(x) > 0$$

Na intervalima na kojima je predznak prve derivacije funkcije negativan, funkcija je padajuća.

Interval pada funkcije je rješenje nejednadžbe:

$$f'(x) < 0$$

Ekstremi funkcije

Intervali rasta i pada blisko su vezani uz pojam lokalnog ekstrema funkcije. Lokalni ekstrem može biti **lokalni maksimum** ili **lokalni minimum**.

Lokalni maksimum funkcije f je točka $(x_0, f(x_0))$ takva da za sve vrijednosti $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ iz nekog otvorenog intervala oko vrijednosti x_0 vrijedi

$$f(x_0) \geq f(x)$$

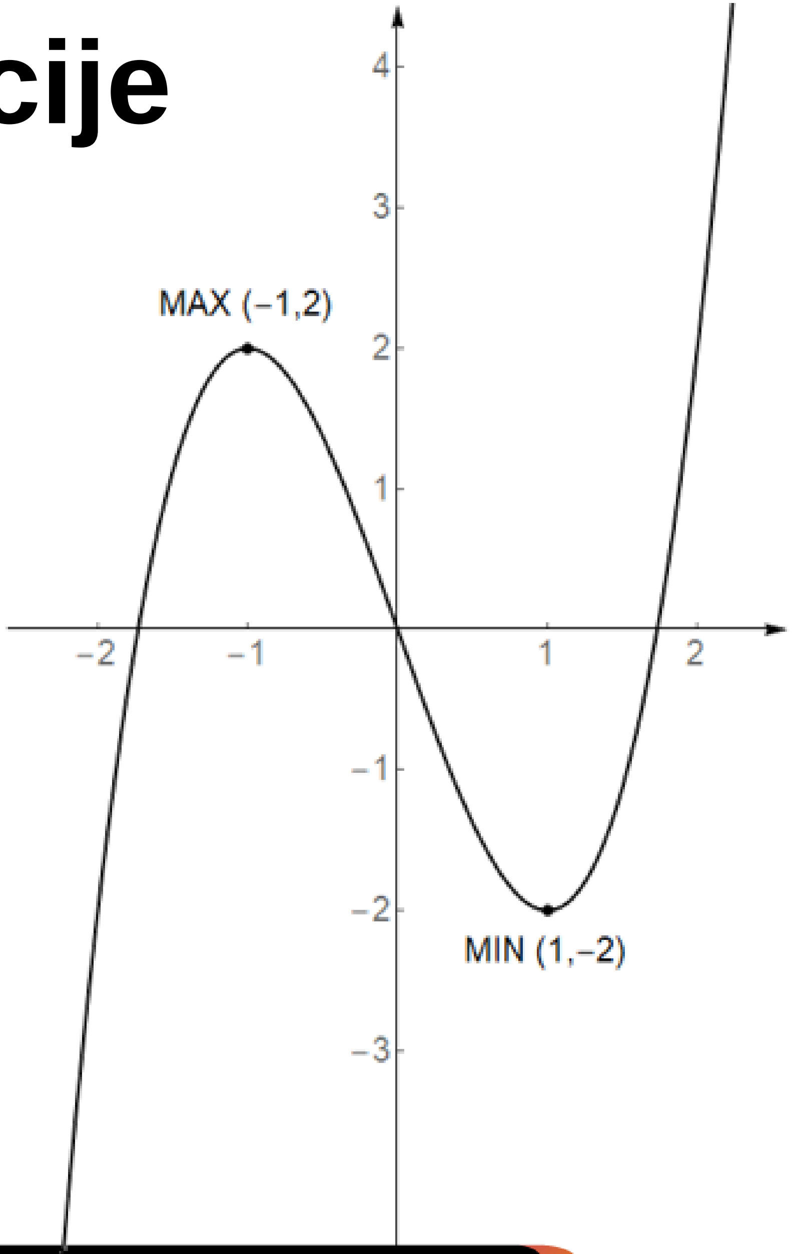
Analogno, za **lokalni minimum** vrijedi

$$f(x_0) \leq f(x)$$

Ekstremi funkcije

Lokalni ekstremi su točke u kojima funkcija postiže svoju najveću ili najmanju vrijednost, ali lokalno.

To ne mora ujedno biti i najveća, odnosno najmanja vrijednost funkcije na cijeloj domeni.



Ekstremi funkcije

Ako funkcija $y = f(x)$ ima maksimum ili minimum u točki x_0 tada je vrijednost prve derivacije u toj točki jednaka nuli.

Taj uvjet je **nužan uvjet** za egzistenciju ekstrema.

Točke koje su rješenja jednadžbe

$$f'(x_0) = 0$$

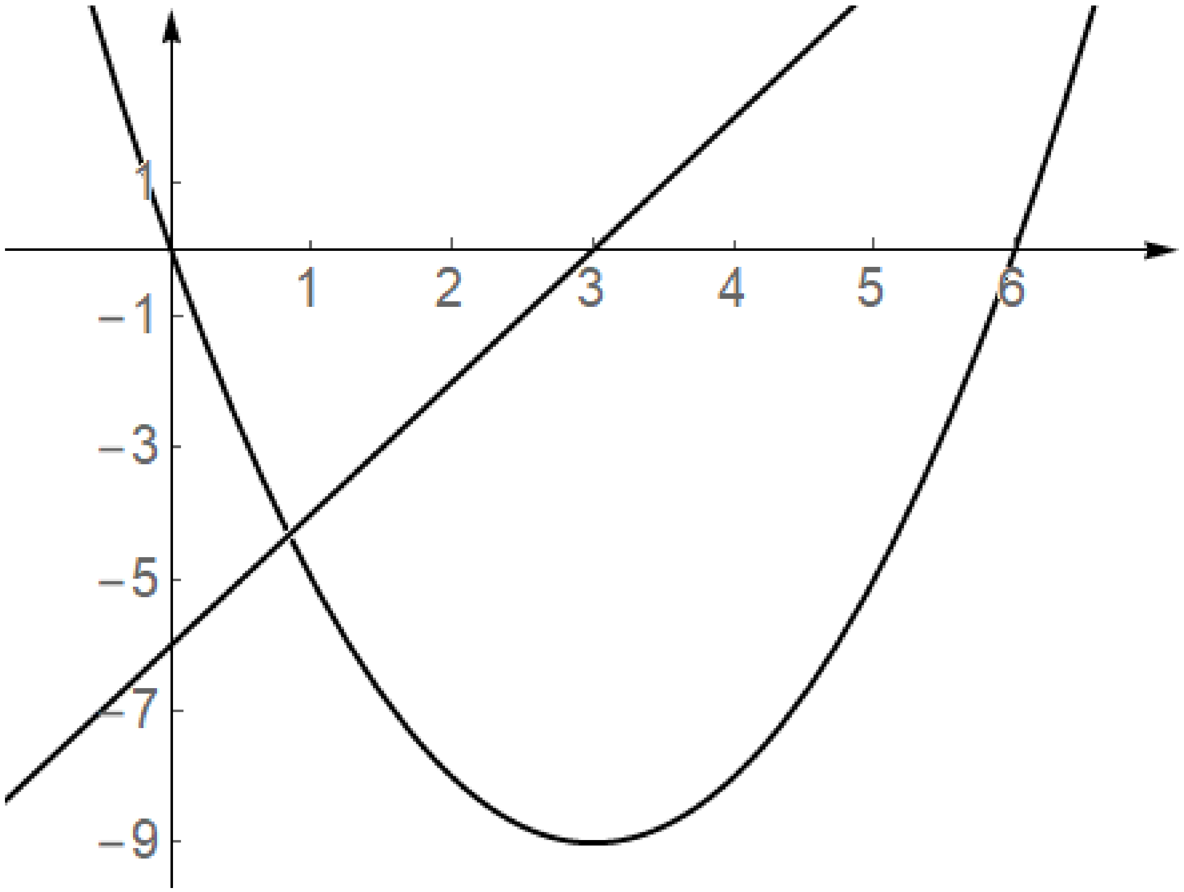
nazivaju se **stacionarnim točkama** funkcije. To su jedine točke u kojima funkcija može imati ekstrem.

Primjer 1. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 2x - 6$$
$$2x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

$$f(3) = -9$$
$$T(3, -9)$$



Je li ta točka minimum ili maksimum funkcije?

Ekstrem funkcije

Ako je **druga derivacija** funkcije u stacionarnoj točki **negativna**, funkcija u toj točki postiže lokalni **maksimum**.

Ako je **druga derivacija** funkcije u stacionarnoj točki **pozitivna**, funkcija u toj točki postiže lokalni **minimum**.

Taj uvjet nazivamo **dovoljnim uvjetom** za egzistenciju ekstrema.

Ekstrem funkcije

Postupak određivanja lokalnih ekstrema:

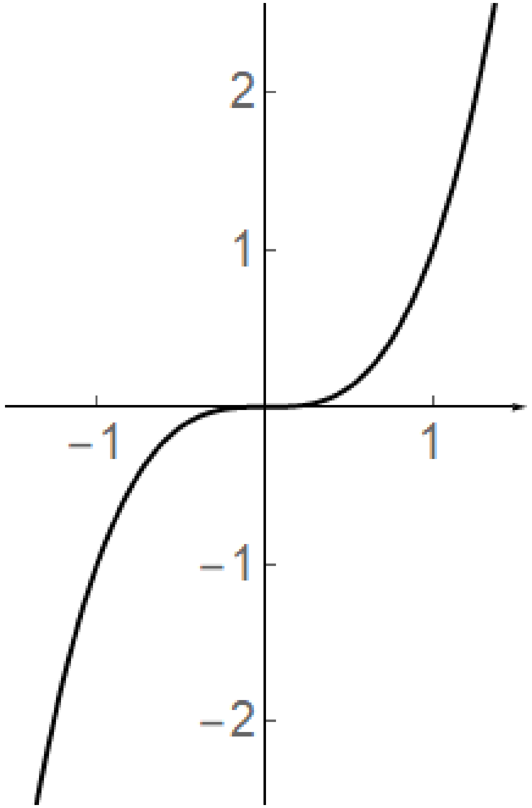
1. **Nužni uvjet**: riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Dobivena rješenja x_1, x_2, ... nazivamo stacionarnim točkama i one su kandidati za točke ekstrema.

2. **Dovoljni uvjet**: stacionarne točke uvrštavamo u $f''(x)$.
   Ako je $f''(x_i) > 0$, tada se u x_1 postiže minimum.
   Ako je $f''(x_i) < 0$, tada se u x_1 postiže maksimum.

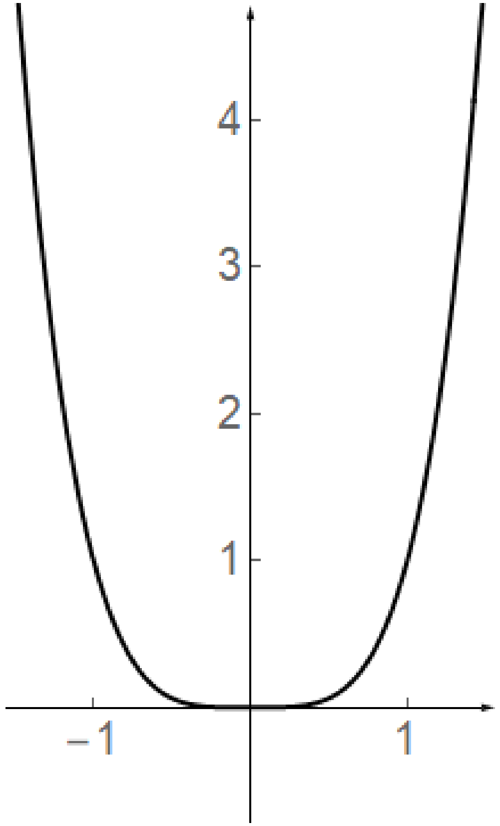
Ekstrem funkcije

No, što se događa ukoliko je druga derivacija u stacionarnoj točki jednaka nuli?

$y = x^3$



$y = x^4$



Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$, tada trebamo tražiti derivacije višeg reda, dok ne nađemo prvu takvu derivaciju koja je u x_0 različita od nule, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Ako je ta derivacija **neparnog reda**, tj. ako je n neparan broj, tada se u x_0 **ne postiže ekstrem**.

Ako je n **paran broj**, tada vrijedi:

$f^{(n)}(x_0) > 0$ - točka minimuma

$f^{(n)}(x_0) < 0$ - točka maksimuma

Primjer 2. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Nužan uvjet:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Stacionarne točke:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1$$

Dovoljan uvjet:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 < 0$$

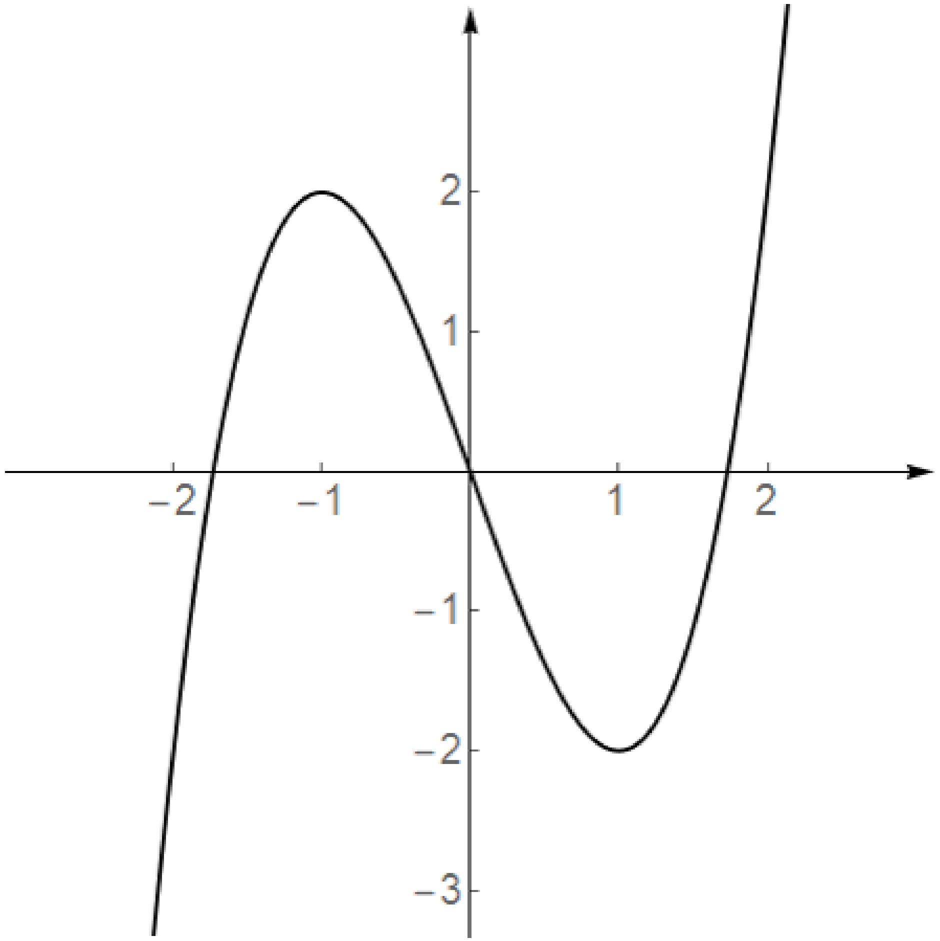
$\text{MAX}\ (-1,2)$

$$f''(1) = 6 > 0$$

$\text{MIN}\ (1,-2)$

Primjer 2. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x$$



Dovoljan uvjet:

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6 < 0$

MAX $(-1,2)$

$f''(1) = 6 > 0$

MIN $(1, -2)$

Primjer 3. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x \cdot e^x$$

Nužan uvjet:

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x$$

$$e^x \cdot (x+1) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$e^x = 0$$

nema rješenja!

Dovoljan uvjet:

$$f''(x) = e^x(x+1) + e^x$$

$$= e^x \cdot (x+2)$$

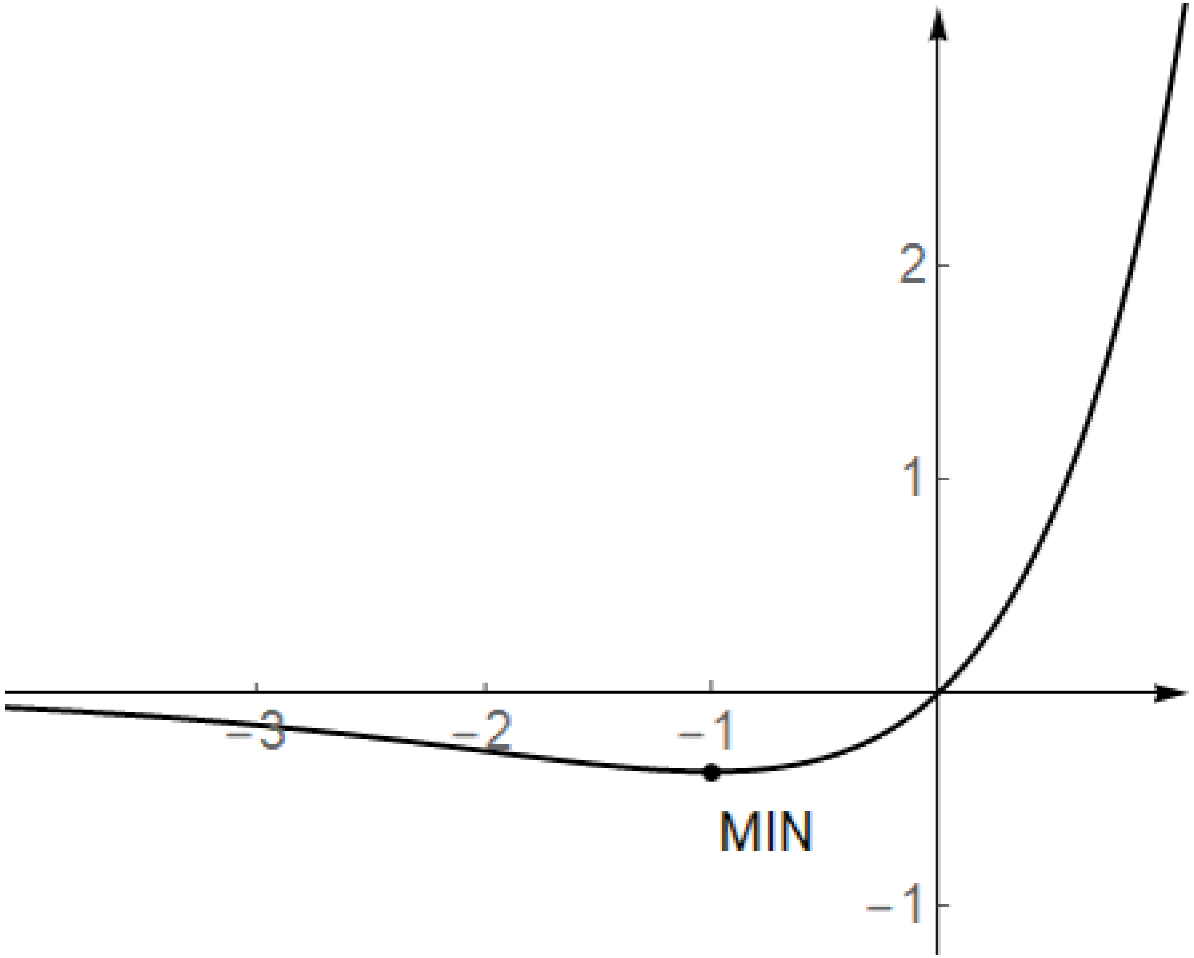
$$f''(-1) = e^{-1} \cdot 1 > 0$$

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$\mathrm{MIN}\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

Primjer 3. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x \cdot e^x$$



Dovoljan uvjet:

$$f''(x) = e^x(x+1) + e^x$$
$$= e^x \cdot (x+2)$$

$$f''(-1) = e^{-1} \cdot 1 > 0$$

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$\mathrm{MIN}\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

Primjer 4. Odredite područja monotonosti funkcije $g(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Prvo odredimo domenu funkcije:

1. $\ln x \neq 0$

   $x \neq e^0$

   $x \neq 1$

2. $x > 0$

$D(f) = \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$

Potom odredimo derivaciju:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Sada odredimo stacionarne točke:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

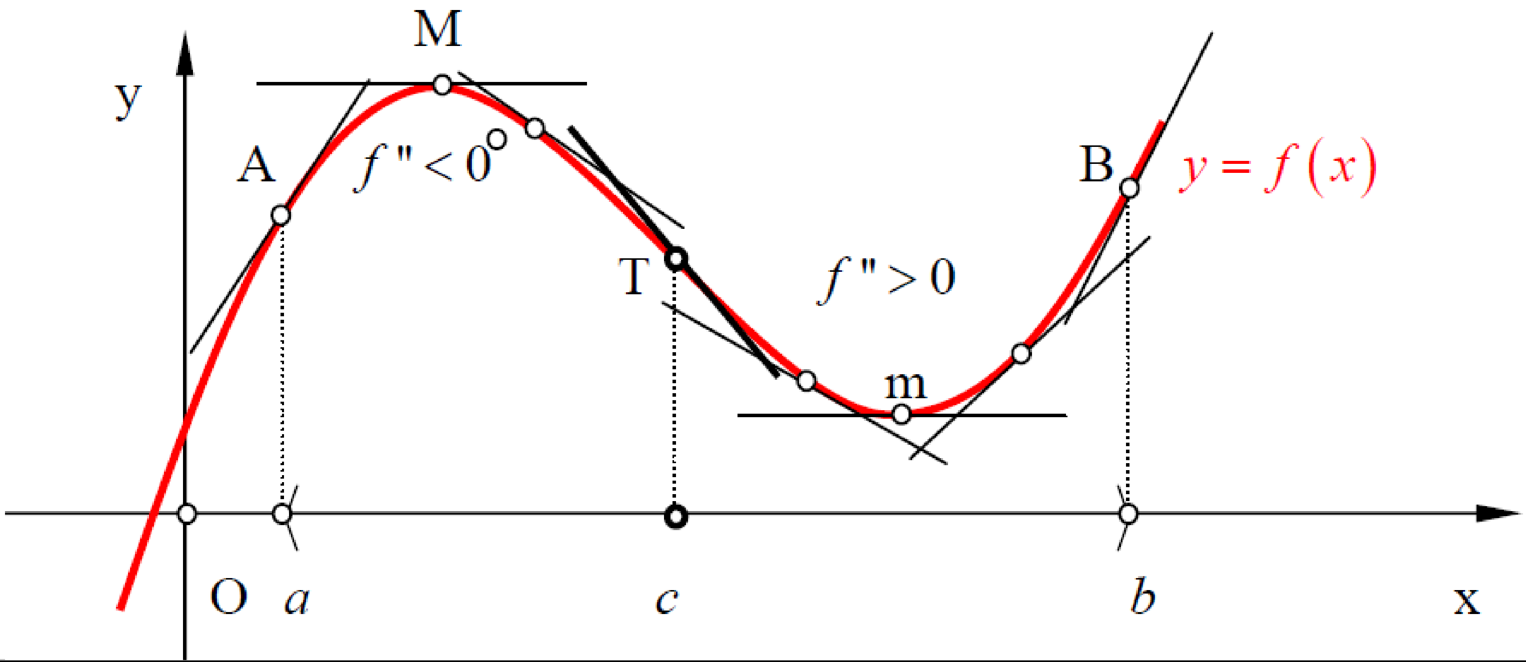
Formiramo tablicu predznaka prve derivacije:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
 & 0 & & 1 & & e & & +\infty \\
\hline
f'(x) & | & - & | & - & | & + & | \\
\hline
f(x) & | & \searrow & | & \searrow & | & \nearrow & | \\
\hline
\end{array}$$

Funkcija raste za $x \in \langle e, +\infty \rangle$
Funkcija pada za $x \in \langle 0,1 \rangle \cup \langle 1, e \rangle$
Točka $(e, f(e)) = (e, e)$ je točka minimuma.

Zakrivljenost

Razlikujemo dvije vrste zakrivljenosti krivulje: konveksnost (zakrivljenost na gore) i konkavnost (zakrivljenost na dolje).



Zakrivljenost

Konkavna krivulja:

Ako u bilo kojoj točki luka AT povučemo tangentu, možemo vidjeti da je u okolini dirališta tangente i krivulje **tangenta iznad luka krivulje.**

Konveksna krivulja:

Ako u bilo kojoj točki luka TB povučemo tangentu, možemo vidjeti da je u okolini dirališta tangente i krivulje **tangenta ispod luka krivulje.**

Zakrivljenost

Tangenta povučena u točki T na krivulju $y = f(x)$ prelazi s jedne strane krivulje na drugu, stoga tangenta u točki T siječe krivulju $y = f(x)$.

Točka T je točka na krivulji u kojoj konkavnost funkcije prelazi u konveksnost funkcije.

Takva točka se naziva **točka infleksije** ili **točka pregiba.**

Zakrivljenost

Kriterij za zakrivljenost funkcije:

Neka je $f: I \to \mathbb{R}$ neprekidna i barem dva puta derivabilna funkcija na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b \rangle$, onda je funkcija f **konveksna** na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in \langle a, b \rangle$, onda je funkcija f **konkavna** na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Zakrivljenost

Kriterij za točku infleksije:

Funkcija f ima točku infleksije ako vrijedi:

1. Nužan uvjet:

$$f''(x) = 0$$

Rješenja te jednadžbe $x_1, x_2, \ldots$ su kandidati za točke infleksije.

2. Dovoljan uvjet:

$$f'''(x_i) \neq 0$$

No umjesto toga radimo tablicu zakrivljenosti!

Primjer 5.

Odredite točke infleksije funkcije $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x$.

Rješenje: Domena funkcije, $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 2 \qquad f''(x) = 6x - 8$$

$$6x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{4}{3}$$

	$-\infty$		$4/3$		∞
$f''(x)$	|	$-$	|	$+$	|
$f(x)$	|	$\cap$	|	$\cup$	|

Točka infleksije:

$$T\left(\frac{4}{3}, -\frac{200}{27}\right).$$

Kako smo to izračunali?

$f(4/3)$

ALGEBRA

Asimptote

Asimptota krivulje:

- pravac čije se točke približavaju po volji blizu točkama zadane krivulje kada jedna ili više koordinata točaka krivulje teži u beskonačnost.
- tangenta u beskonačno dalekoj točki
- horizontalna, vertikalna, kosa asimptota

Asimptote

Vertikalna asimptota (V.A.)

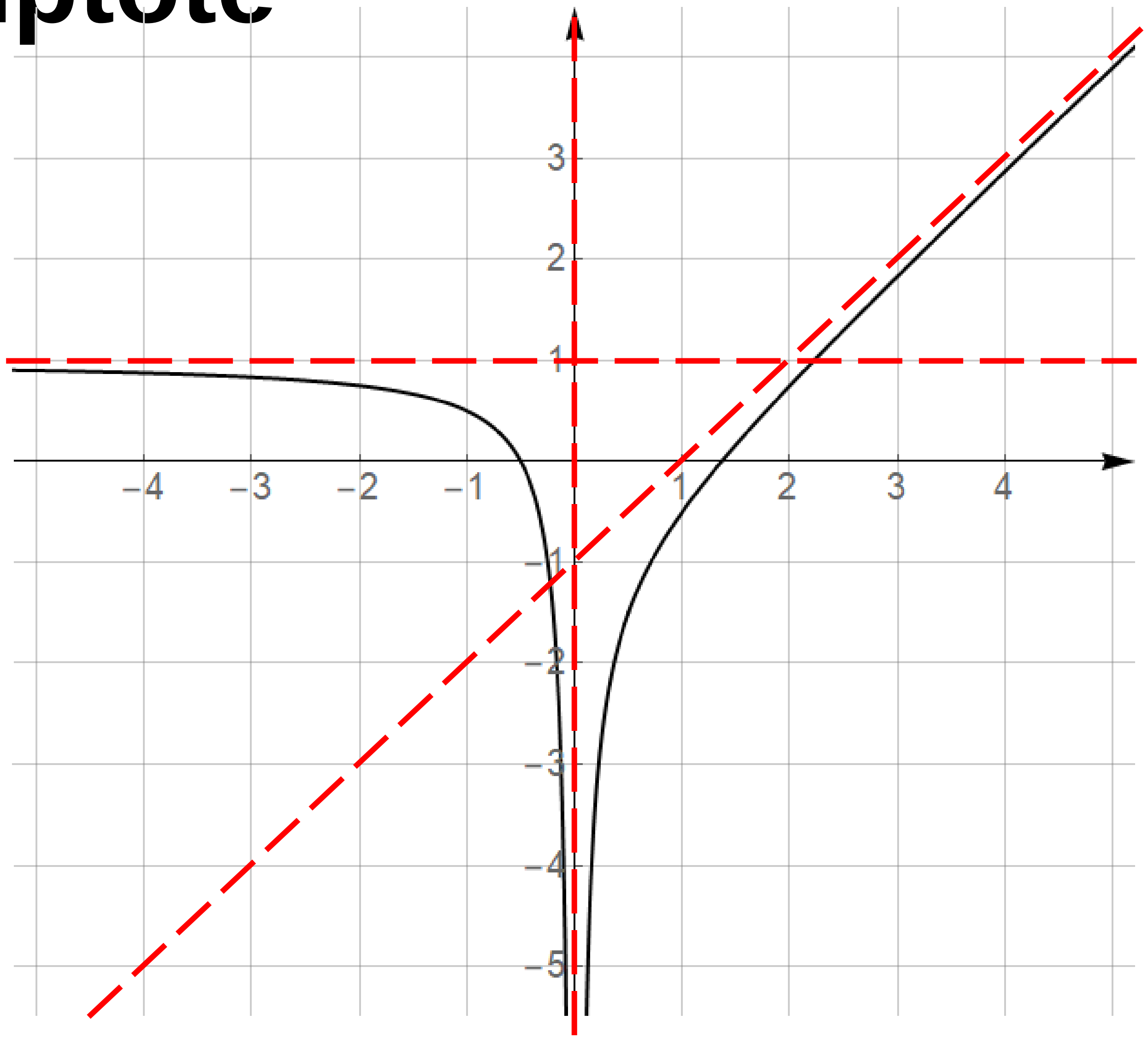
$$x = a$$

Horizontala asimptota (H.A.)

$$y = b$$

Kosa asimptota (K.A.)

$$y = kx + l$$



Vertikalna asimptota

Kandidati za vertikalnu asimptotu su točke na rubu domene $x_0, x_1, \ldots$

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ domena funkcije, takva da je x_0 rubna točka te domene, $f: D \to \mathbb{R}$.

Pravac $x = x_0$ je **vertikalna asimptota** grafa funkcije $f(x)$ ako je vrijedi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Horizontalna asimptota

Horizontalna asimptota može postojati ukoliko se domena funkcije neograničeno proteže u pozitivnom ili negativnom smjeru.

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ domena funkcije takva da se D neograničeno proteže u pozitivnom ili negativnom smjeru, $f: D \to \mathbb{R}$.

Pravac $y = a$ je **horizontalna asimptota** grafa funkcije $f(x)$ ako vrijedi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

Kosa asimptota

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ domena funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ koja se neograničeno proteže u pozitivnom ili negativnom smjeru.

Pravac $y = kx + l$ je **kosa asimptota** grafa funkcije $f(x)$, ako postoje brojevi $k \neq 0$ i l takvi da vrijedi:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$$

Asimptote

Funkcija može imati vertikalne asimptote ukoliko postoje konačni brojevi koji su rubovi domene.

Vertikalnih asimptota može biti po volji mnogo.

Funkcija može imati horizontalnu asimptotu ukoliko se domena proteže u beskonačnost.

Postoje najviše dvije horizontalne asimptote.

Ukoliko funkcija ima horizontalnu asimptotu, tada nema kosu asimptotu.

Primjer 6. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$

$x = 0$ je vertikalna asimptota

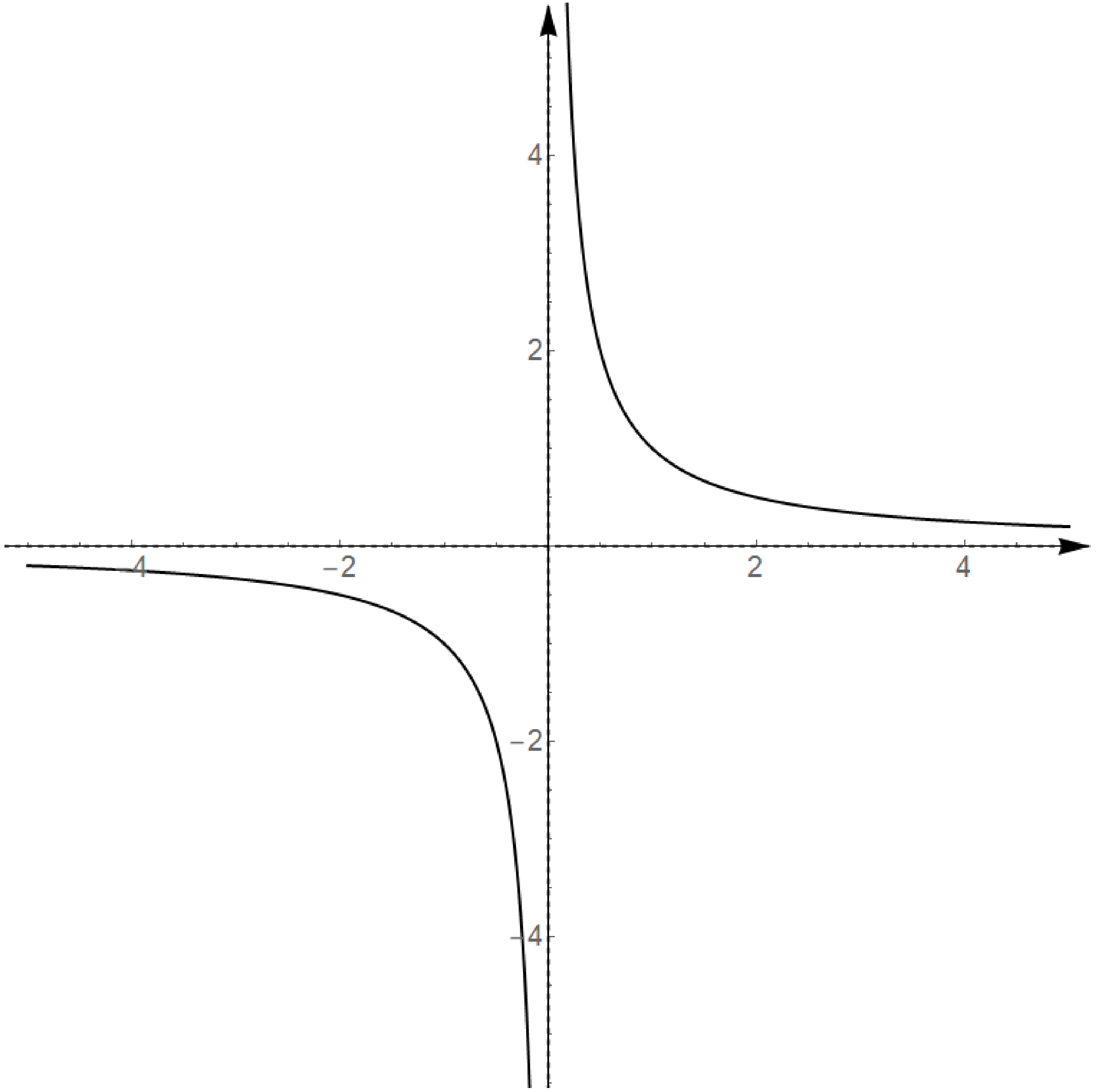
Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

$y = 0$ je horizontalna asimptota

Primjer 6. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Primjer 7. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$D(f) = \mathbb{R}$

Vertikalna asimptota:

- ne postoji
- zašto?

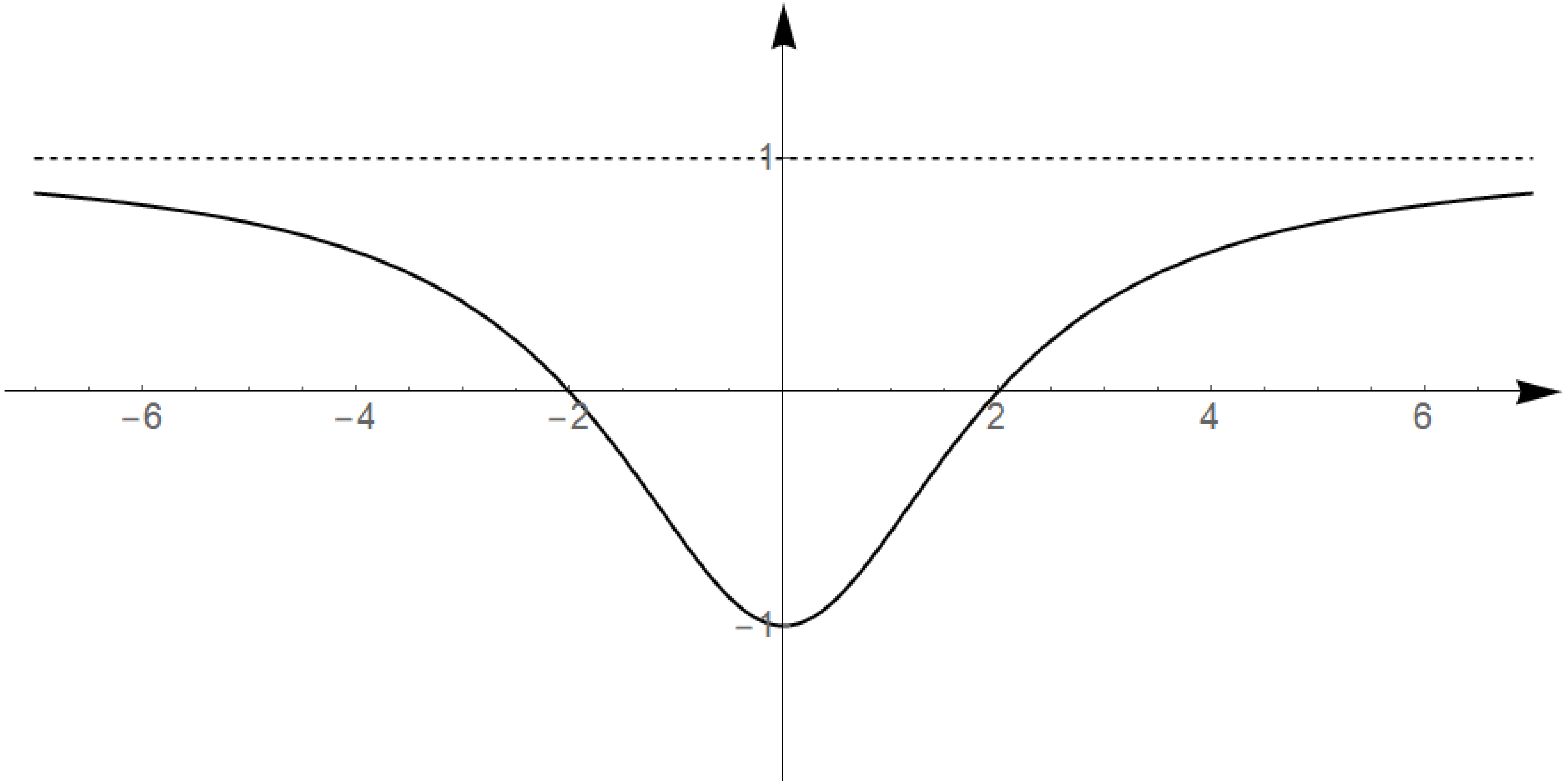
Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1$$

$y = 1$ je horizontalna asimptota

Primjer 7. Odredite asimptote na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$



Primjer 8. Odredite asimptote na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x^2+5}{x-1}$$

$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5}{x-1} = \infty$$

$x = 1$ je vertikalna asimptota

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+5}{x-1} = \infty$$

Ne postoji horizontalna asimptota.

Primjer 8. Odredite asimptote na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x^2+5}{x-1}$$

Kosa asimptota:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+5}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+5}{x^2-x} = 1$$

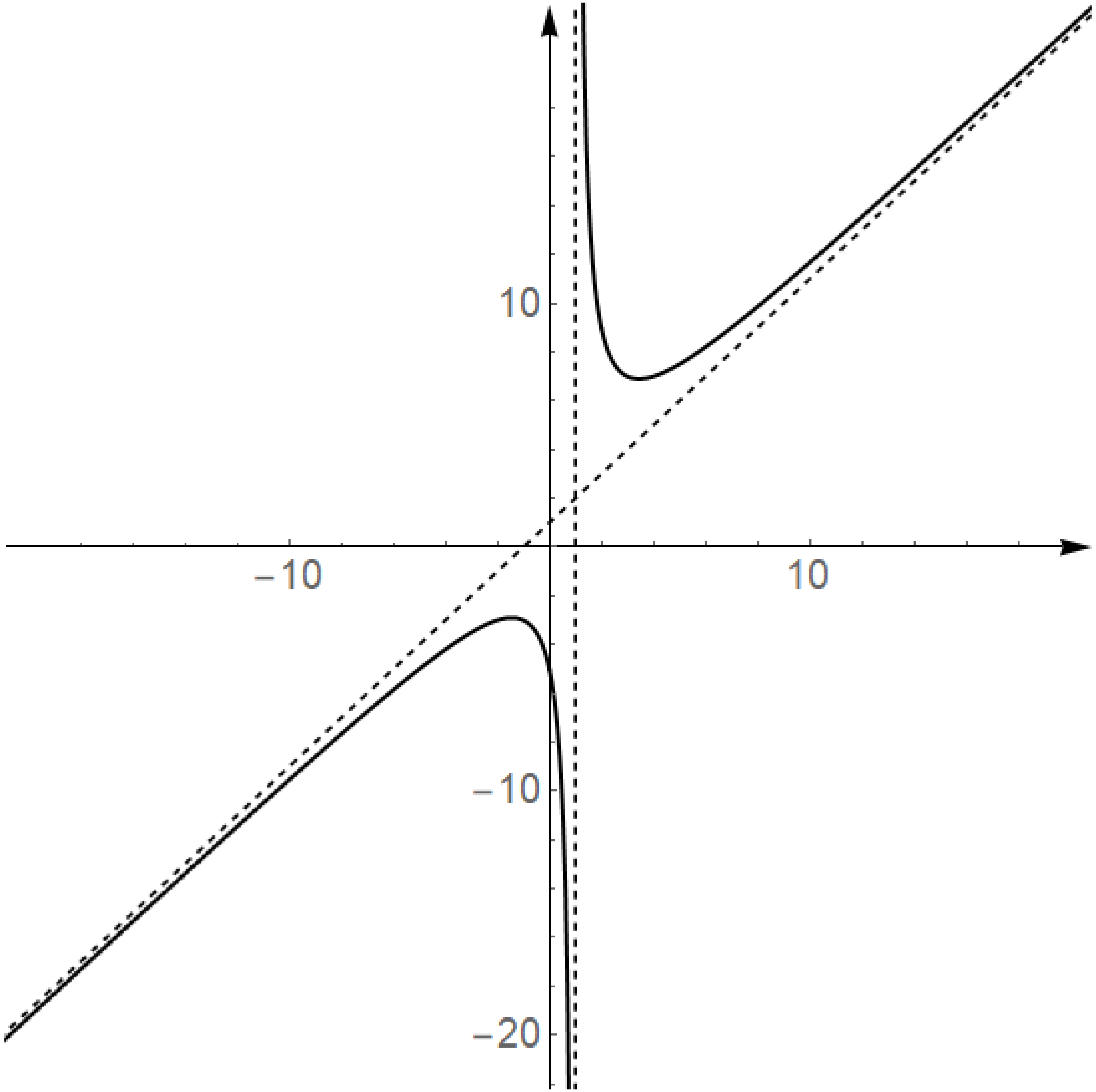
$$l = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+5}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+5}{x-1} = 1$$

Pravac $y = x + 1$ je kosa asimptota.

Primjer 8.

Odredite asimptote na graf funkcije

$$g(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$$



Tok funkcije

1. Domena
2. Nultočke
3. Monotonost (rast / pad)
4. Ekstremi
5. Zakrivljenost (konkavnost / konveksnost)
6. Točke infleksije (pregiba)
7. Asimptote
8. Graf funkcije

Primjer 9. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

1. Domena: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

2. Nul-točke: $x^2 = 0$ $\quad x = 0$ $\quad N(0,0)$

3. Monotonost i ekstremi:

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x-2) - x^2 \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

Primjer 9. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	|	$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	|
$f(x)$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$	|

Funkcija raste za $x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$.
Funkcija pada za $x \in \langle 0,2 \rangle \cup \langle 2,4 \rangle$.

Primjer 9. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$
$f(x)$	$\vert$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	$\vert$

MAX $\quad$ MIN

$T_1(0,0)$ $\quad$ $T_2(4,8)$

Primjer 9. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

5. Zakrivljenost i točke infleksije:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} \qquad \frac{8}{(x-2)^3} = 0$$

	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$	|	$-$	|	$+$	|
$f(x)$	|	$\cap$	|	$\cup$	|

Jednadžba nema rješenja. Funkcija je konveksna za $x \in \langle 2, \infty \rangle$.

Ne postoje točke infleksije. Funkcija je konkavna za $x \in \langle -\infty, 2 \rangle$.

Primjer 9. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \infty$$

Pravac $x = 2$ je vertikalna asimptota.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-2} = \cdots = \infty$$

Nema horizontalnih asimptota.

Primjer 9. Odredite tok funkcije i skicirajte graf:

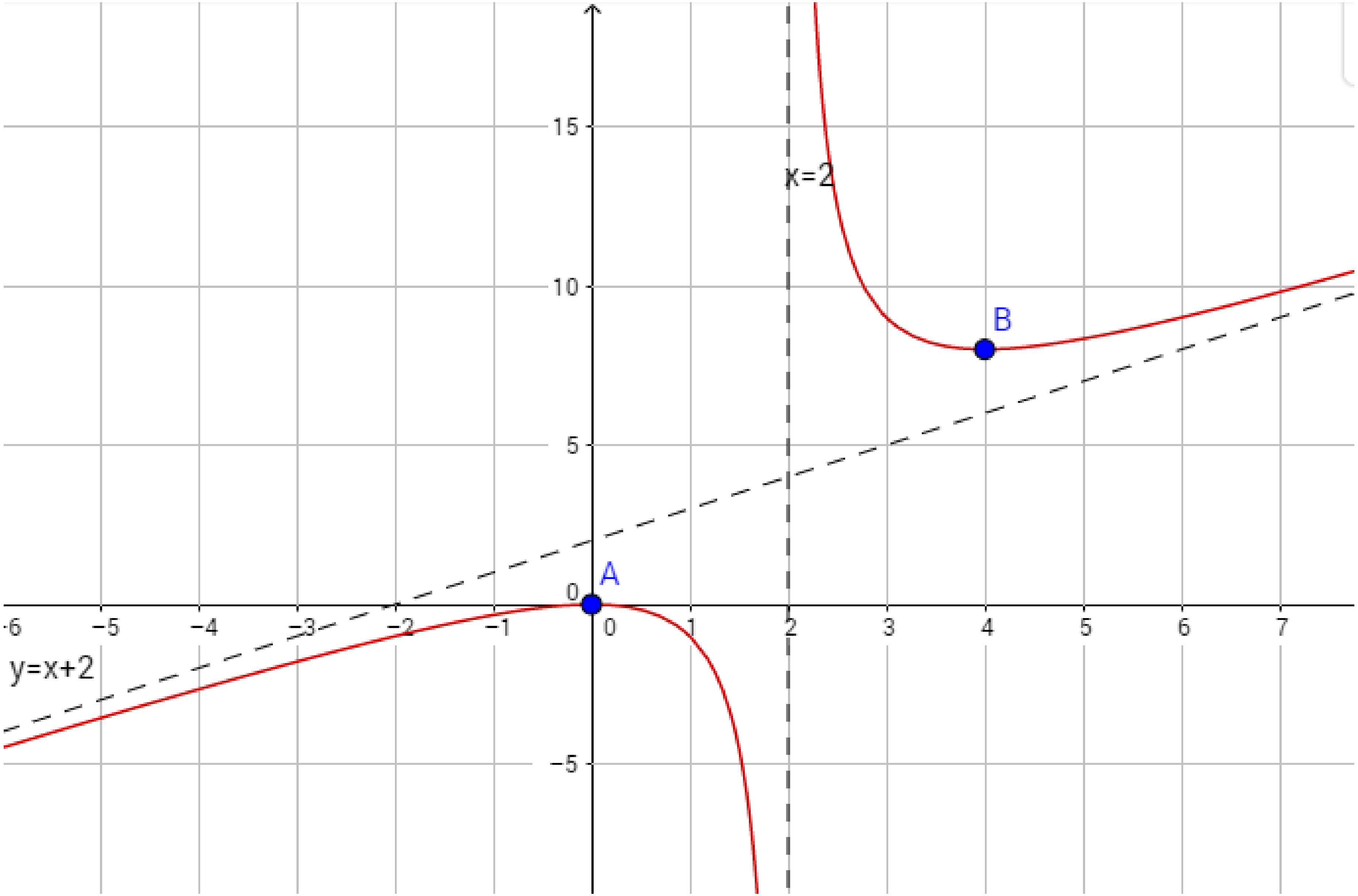
$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

Kosa asimptota:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \cdots = 1$$

$$l = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$$

Pravac $y = x + 2$ je kosa asimptota.



15
x=2
10
B
5
A
0
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
y=x+2
-5

Video materijali

Aleksandar Hatzivelkos:

1. Domena funkcije:
   https://www.youtube.com/watch?v=hMv6DDhLk7o
2. Asimptote:
   https://www.youtube.com/watch?v=FrNWsIcr458
   https://www.youtube.com/watch?v=cGm6FG7DPKg
   https://www.youtube.com/watch?v=vJJXGrNOcyQ (kosa)
3. Rast i pad funkcije:
   https://www.youtube.com/watch?v=nKqwrJRsJHs
   https://www.youtube.com/watch?v=_8OoityoL9Q

Video materijali

Aleksandar Hatzivelkos:

4. Ekstremi funkcije:
   https://www.youtube.com/watch?v=eudiyG1inaY
   https://www.youtube.com/watch?v=8zXsvmsxuAQ
   https://www.youtube.com/watch?v=b5WcB5Tkv84
5. Zakrivljenost funkcije:
   https://www.youtube.com/watch?v=-UvYnYJ7kdk
   https://www.youtube.com/watch?v=gY6G22lJUYw
6. Tok funkcije:
   https://www.youtube.com/watch?v=cDE2RIL0P7A
   https://www.youtube.com/watch?v=q-eayH5hC4Q

Video materijali

Toni Milun:

https://www.youtube.com/playlist?list=PLXygsnSpBk5Rwb9Z1IQAJYl4fbgEjSkBD

(asimptote, svi videozapisi)

https://www.youtube.com/playlist?list=PLXygsnSpBk5QSmNA-ya7U9bf9UVVuJBHg

(tok funkcije, svi videozapisi)

Hvala ☺