ALGEBRA
BERNAYS
SVEUČILIŠTE

MATEMATIČKA ANALIZA

Primjena derivacija u ekonomiji

Primjene u ekonomiji

Diferencijalni račun ima klasičnu primjenu u nekoliko područja ekonomske znanosti.

Dvije najistaknutije primjene su kod računanja **graničnih funkcija** i **koeficijenata elastičnosti**.

U tu svrhu, prvo ćemo promatrati funkciju ukupnih troškova:

$$T(Q)$$

gdje je Q količina (robe), a T ukupan iznos potreban za proizvodnju.

Prosječni troškovi

Za funkciju ukupnih troškova prvo definiramo funkciju **prosječnih troškova**, koju označavamo s $AT(Q)$:

$$AT(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$$

Prosječni troškovi opisuju potrošnju po jedinici proizvedene robe.

Granični troškovi

Za funkciju ukupnih troškova također definiramo funkciju **graničnih (marginalnih) troškova**, $MT(Q)$:

$$MT(Q) = T'(Q)$$

Granični troškovi opisuju rast ukupnih troškova u odnosu na rast proizvedene robe (usluge).

Opisuju „brzinu" rasta troškova, ali ne u vremenskom slijedu, već u odnosu na količinu.

Granični troškovi

Granični troškovi mogu biti izrazito niski ili izrazito visoki.

Primjerice, granični troškovi u prijevozu putnika zrakoplovom su niski – dodatni putnik malo podiže ukupne troškove prijevoza (jako mala količina goriva, te trošak hrane i pića).

Granični troškovi u proizvodnji mogu biti izrazito visoki, kada primjerice proizvodnja dodatnog proizvoda probije limit opskrbe električnom energijom, koju onda treba osigurati iz novih izvora (npr. generatori).

Primjer 1. Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje:

$$T(Q) = 2Q^2 + 24Q + 32$$

Odredite funkcije prosječnih i graničnih troškova te ih prikažite grafički.

$$AT(Q) = \frac{T(Q)}{Q} = \frac{2Q^2 + 24Q + 32}{Q} = 2Q + 24 + \frac{32}{Q}$$

Za sve (osnovne) ekonomske veličine, poput količine, cijene, troškova – podrazumijevamo da nisu negativne.

Domena funkcije: $D_T = \langle 0, \infty \rangle$

$$AT(Q) = \frac{2Q^2 + 24Q + 32}{Q} = 2Q + 24 + \frac{32}{Q}$$

Nultočke: $2Q^2 + 24Q + 32 = 0$ $\quad Q_{1,2} = \frac{-24 \pm 17.9}{4}$

Nema nultočki u (ekonomskoj) domeni funkcije.

Asimptote: $\lim_{Q \to 0} AT(Q) = \infty$

Vertikalna asimptota je $Q = 0$.

Kosa asimptota je $T = 2Q + 24$

$$AT(Q) = \frac{2Q^2 + 24Q + 32}{Q} = 2Q + 24 + \frac{32}{Q}$$

Rast i pad: $AT'(Q) = 2 - \frac{32}{Q^2}$

$$2 - \frac{32}{Q^2} = 0 \qquad Q^2 = 16 \qquad Q = 4$$

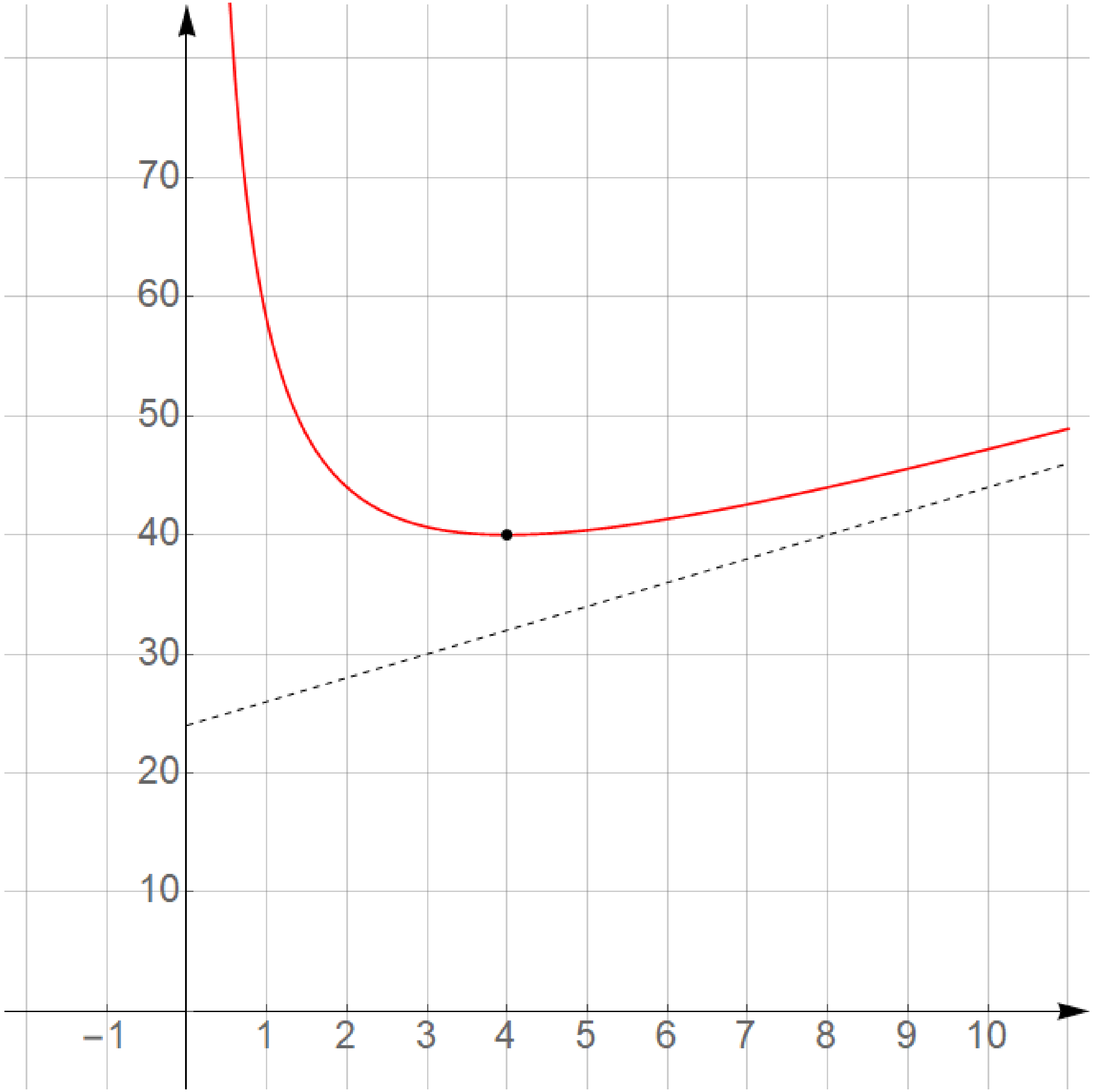
	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	|	$-$	|	$+$	|
$f(x)$	|	↘	|	↗	|

Minimum: $(4,40)$

Prosječna funkcija:

$$AT(Q) = \frac{2Q^2 + 24Q + 32}{Q}$$

$$AT(Q) = 2Q + 24 + \frac{32}{Q}$$



Primjer 1. Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje:

$$T(Q) = 2Q^2 + 24Q + 32$$

Odredite funkcije prosječnih i graničnih troškova te ih prikažite grafički.

Granična funkcija:

$$MT(Q) = T'(Q) = 4Q + 24$$

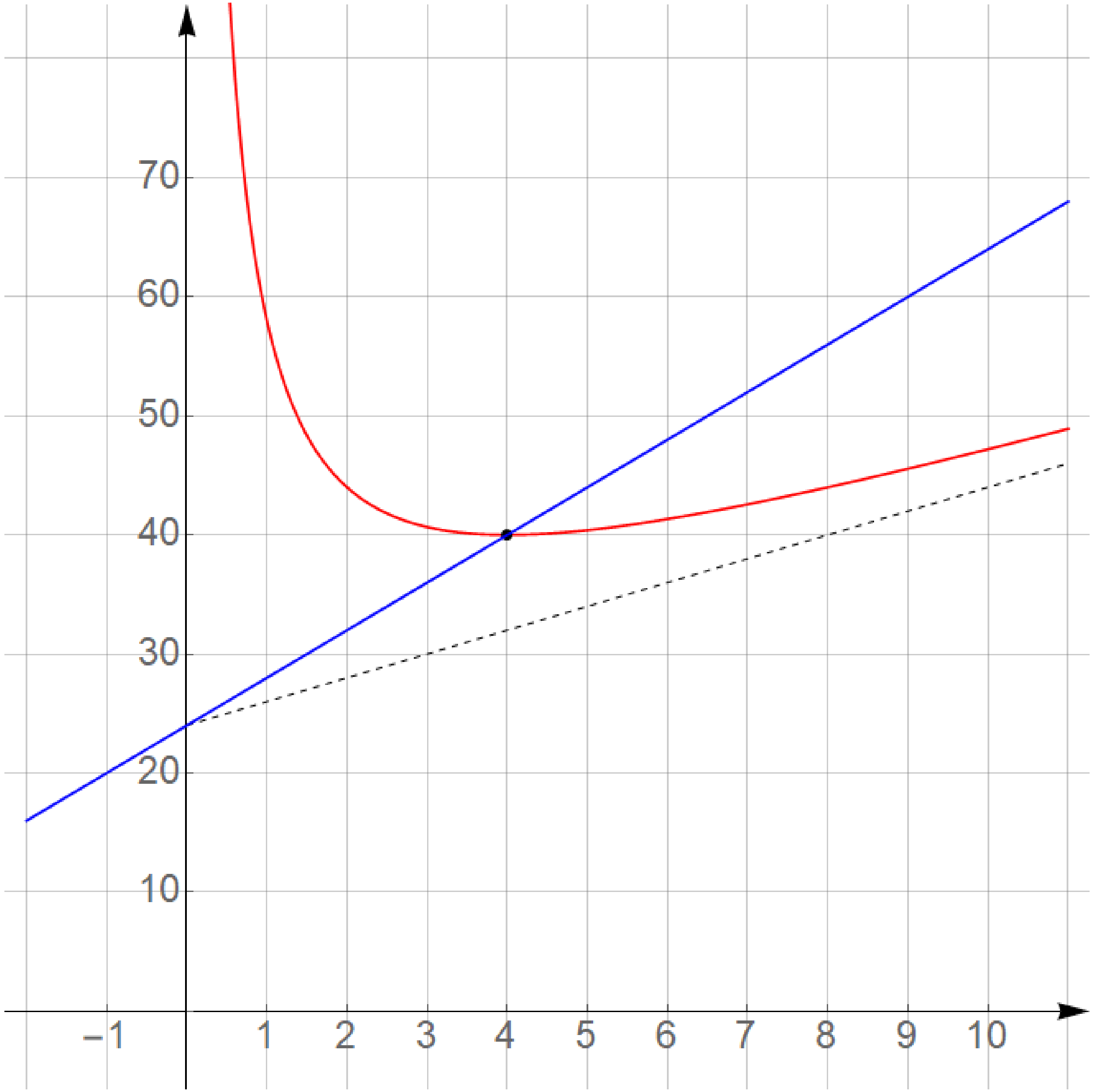
Linearna funkcija čiji je graf pravac.

Prosječna funkcija:

$$AT(Q) = 2Q + 24 + \frac{32}{Q}$$

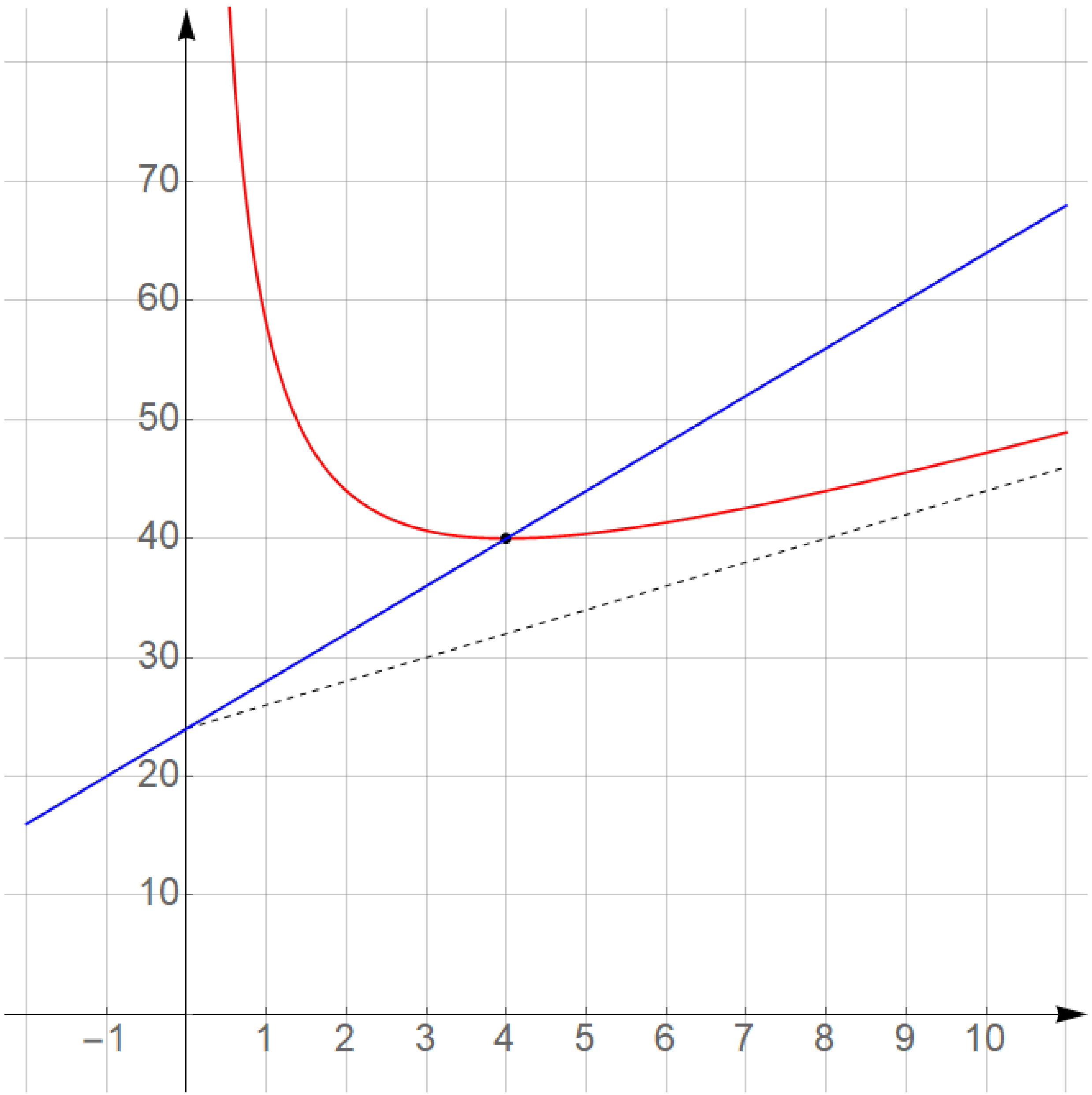
Granična funkcija:

$$MT(Q) = 4Q + 24$$



Funkcija prosječnih troškova i funkcija graničnih troškova se sijeku u točki koja je minimum funkcije prosječnih troškova.

To nije slučajno.



Granični i prosječni troškovi

Ako prosječni troškovi strogo rastu (padaju) s porastom količine proizvoda, tada su granični troškovi veći (manji) od prosječnih.

Ako prosječni troškovi rastu, tada je njezina derivacija strogo pozitivna.

$$\left(\frac{T(Q)}{Q}\right)' = \frac{T'(Q) \cdot Q - T(Q)}{Q^2} > 0 \qquad\qquad T'(Q) > \frac{T(Q)}{Q}$$

Granični i prosječni troškovi

Ako prosječni troškovi strogo rastu (padaju) s porastom količine proizvoda, tada su granični troškovi veći (manji) od prosječnih.

Odavde slijedi kako su granični i prosječni troškovi jednaki u točki u kojoj funkcija prosječnih troškova postiže ekstremnu vrijednost.

Granične i prosječne funkcije

Granične i prosječne funkcije jednako definiramo i za druge ekonomske funkcije:

- funkciju ukupnih prihoda, $P(Q)$

  prosječni prihodi - $AP(Q) = \frac{P(Q)}{Q}$

  granični prihodi - $MP(Q) = P'(Q)$

- funkciju ukupne dobiti, $D(Q)$

  prosječna dobit - $AD(Q) = \frac{D(Q)}{Q}$

  granični prihodi - $MD(Q) = D'(Q)$

Koeficijent elastičnosti

Značajno pitanje u ekonomiji, za dvije ekonomske veličine koje su povezane je: *kako mjeriti reakciju jedne veličine na promjenu druge veličine?*

Na primjer, za poznatu funkciju potražnje $q = f(p)$ koja ovisi o cijeni proizvoda p, interesira nas kako će se promijeniti potražnja ukoliko se cijena na nekoj razini poveća za 1%?

Mjera pomoću koje ćemo odgovoriti na to pitanje je koeficijent elastičnosti.

Koeficijent elastičnosti

Elastičnost u ekonomiji je sposobnost jedne ekonomske veličine da reagira na promjenu druge ekonomske veličine s kojom je (neprekidno) funkcijski povezana.

Promotrimo dvije ekonomske veličine: x i $y = f(x)$.

Koeficijentom elastičnosti nazivamo omjer njihovih relativnih promjena:

$$E_{y,x} = \frac{\text{relativna promjena od } y}{\text{relativna promjena od } x}$$

Koeficijent elastičnosti

$$E_{y,x} = \frac{\text{relativna promjena od } y}{\text{relativna promjena od } x}$$

Uz uvjet da su promjene beskonačno male, $\Delta x \to 0$ (a onda zbog neprekidnosti i $\Delta y \to 0$), pišemo:

$$\boxed{E_{y,x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \boxed{= \frac{x}{y} \cdot y'}$$

Koeficijent elastičnosti

U interpretaciji koeficijenta elastičnosti, dobivenim rezultatom aproksimiramo relativnu promjenu funkcijske vrijednosti $y = f(x)$ kada se relativna vrijednost veličine x promijeni za neku malu vrijednost, npr. 1%.

$$E_{y,x} \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{1}{100}} = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100$$

Dakle kada varijabla x raste za 1%, tada se funkcija $y = f(x)$ približno promijeni za $E_{y,x}\%$.

Primjer 2. Zadana je funkcija potražnje $q(p) = p^2 - 4p + 13$ gdje je p cijena tog proizvoda. Izračunajte i interpretirajte koeficijent elastičnosti $E_{q,p}$ na razinama cijena $p_1 = 1$ i $p_2 = 5$.

$$q'(p) = 2p - 4$$

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{p^2 - 4p + 13} \cdot (2p - 4) = \frac{2p^2 - 4p}{p^2 - 4p + 13}$$

$$E_{q,p}(1) = \frac{2 - 4}{1 - 4 + 13} = -\frac{1}{5}$$

Na razini cijena $p_1 = 1$, kada cijena raste za 1%, potražnja približno **pada** za $\frac{1}{5}\%$.

Primjer 2. Zadana je funkcija potražnje $q(p) = p^2 - 4p + 13$ gdje je p cijena tog proizvoda. Izračunajte i interpretirajte koeficijent elastičnosti $E_{q,p}$ na razinama cijena $p_1 = 1$ i $p_2 = 5$.

$$q'(p) = 2p - 4$$

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{p^2 - 4p + 13} \cdot (2p - 4) = \frac{2p^2 - 4p}{p^2 - 4p + 13}$$

$$E_{q,p}(5) = \frac{2 \cdot 25 - 20}{25 - 20 + 13} = \frac{5}{3}$$

Na razini cijena $p_2 = 5$, kada cijena raste za 1%, potražnja približno **raste** za $\frac{5}{3}\%$.

Primjer 3. Zadana je funkcija cijene $p(q) = 2\sqrt[3]{q}$, gdje je q količina proizvoda. Izračunajte i interpretirajte koeficijent elastičnosti $E_{p,q}$ na razinama količine $q_1 = 10$ i $q_2 = 50$.

$$p(q) = 2\, q^{\frac{1}{3}} \qquad p'(q) = \frac{2}{3} \cdot q^{-\frac{2}{3}}$$

$$E_{p,q} = \frac{q}{p} \cdot p' = \frac{\boxed{q}}{\cancel{2}\,\boxed{q^{\frac{1}{3}}}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \boxed{q^{-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot q^{1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Na svim razinama količine q, kada količina raste za 1%, cijena približno **raste** za $\frac{1}{3}\%$.

Primjer 4. Zadana je funkcija korisnosti $u(m) = 3 \cdot e^{2m}$, gdje je m novčana masa. Izračunajte i interpretirajte koeficijent elastičnosti $E_{u,m}$ na razini novčane mase $m = 5$.

$$u(m) = 3\, e^{2m} \qquad u'(m) = 3 \cdot e^{2m} \cdot 2$$

$$E_{u,m} = \frac{m}{u} \cdot u' = \frac{m}{\cancel{3\, e^{2m}}} \cdot \cancel{6\, e^{2m}} = 2m$$

$$E_{u,m}(5) = 10$$

Na razini novčane mase $m = 5$, kada novčana masa raste za 1%, korisnost približno **raste** za 10%.

Primjer 5. Zadana je funkcija dobiti $D(p) = \frac{1}{p^2+1}$, gdje je p cijena proizvoda. Izračunajte i interpretirajte koeficijent elastičnosti $E_{D,p}$ na razini cijena $p = 1$.

$$D'(p) = \frac{0 - 1 \cdot 2p}{(p^2+1)^2} = \frac{-2p}{(p^2+1)^2}$$

$$E_{D,p} = \frac{p}{D} \cdot D' = \frac{p}{\frac{1}{p^2+1}} \cdot \frac{-2p}{(p^2+1)^2} = \frac{-2p^2}{p^2+1} \qquad E_{D,p}(1) = -1$$

Na razini cijena $p = 1$, kada cijena raste za 1%, dobit približno **pada** za 1%.

Video materijali

Aleksandar Hatzivelkos:

1. Koeficijent elastičnosti:
   https://www.youtube.com/watch?v=JW9-kcZaqGQ
   https://www.youtube.com/watch?v=yf3W9RoDyMw
   https://www.youtube.com/watch?v=_HmNg1Ktp44

Hvala ☺