ALGEBRA BERNAYS
SVEUČILIŠTE

MATEMATIČKA ANALIZA

Metoda supstitucije

Metode integriranja

1. Metoda neposredne integracije

2. Metoda supstitucije

3. Metoda parcijalne integracija

Neposredna integracija

Koristimo tablične integrale i svojstva integriranja.

Primjer 1.

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{2x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \right) dx = \int (x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + x + c$$

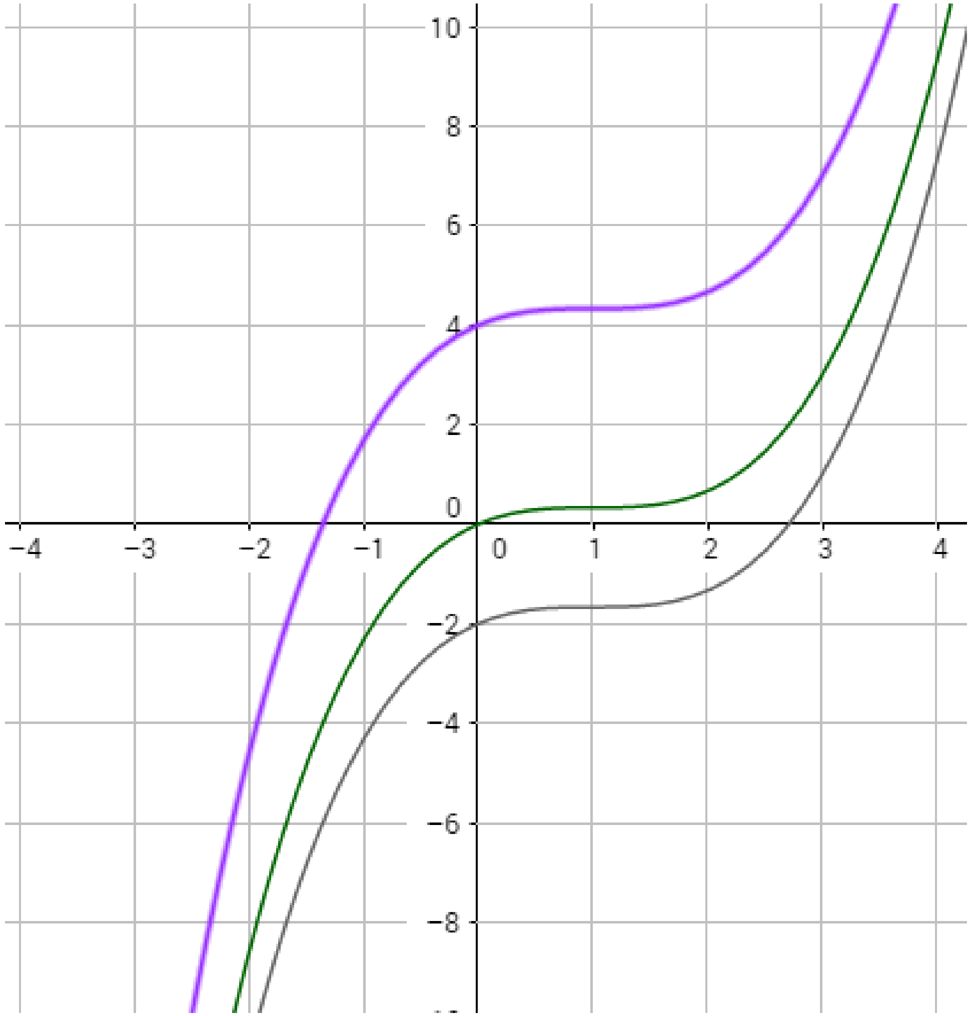
Neposredna integracija

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + c$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 4$$

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2$$



Neposredna integracija

Primjer 2.

$$\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-2} + 4 \cdot \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 2\frac{x^{-1}}{-1} + 4\ln|x| + c \quad = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{2}{x} + 4\ln|x| + c$$

Neposredna integracija

Primjer 3.

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx$$

$$= \int \left((2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + (3^x)^2\right) dx$$

$$= \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx \quad = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c$$

Metoda supstitucije

Primjer 4.

$$\int (2x+1)^{99} dx$$

$$= \left| \begin{matrix} 2x+1=t \\ 2\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int t^{99} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{99}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{100}}{100} + c = \frac{1}{200} (2x+1)^{100} + c$$

Neka postoji primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu $I \in < a, b >$, dakle neka je:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad F'(x) = f(x)$$

Do funkcije $F(x)$ metodom supstitucije dolazimo na sljedeći način: Zamijenimo x s funkcijom $g(t)$, tj $x = g(t)$. zatim imamo $dx = g'(t)dt$ i dolazimo do novog integrala:

$$\int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

koji je jednostavniji od početnog.

Metoda supstitucije

Metodu supstitucije najčešće koristimo pri integriranju složenih podintegralnih funkcija.

U situaciji kada imamo „dugi izraz": pod korijenom, u nazivniku, u zagradama, kao argument neke funkcije (trigonometrijskih funkcija, eksponencijalnih funkcija, logaritamskih funkcija…)

„Estetski kriterij": *Najružniji dio integrala ide u supstituciju.* ;)

Metoda supstitucije

Primjer 5.

$$\int e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} 3x = t \\ 3\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{matrix} \right|$$

$$= \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

Metoda supstitucije

Primjer 5.

$$\int e^{3x} dx$$

Provjera:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}e^{3x}+c\right) = \frac{1}{3}\cdot e^{3x}\cdot 3+0 = e^{3x}$$

Metoda supstitucije

Primjer 6.

$$\int \frac{5}{-x+2}dx \quad = \begin{vmatrix} -x+2=t \\ -dx=dt \\ dx=-dt \end{vmatrix}$$

$$= \int \frac{5}{t}(-dt) \quad = -5\int \frac{1}{t}dt \quad = -5\ln|t|+c$$

$$= -5\ln|-x+2|+c$$

Metoda supstitucije

Primjer 7.

$$\int x \sin x^2 \, dx = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array} \right|$$

$$= \int \cancel{x} \cdot \sin t \, \frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \cos t + c = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

Metoda supstitucije

Primjer 8.

$$\int \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+2x=t \\ (2x+2)dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2x+2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{3x+3}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2x+2} = \int \frac{3\cancel{(x+1)}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2\cancel{(x+1)}}$$

$$= \frac{3}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 3\sqrt{t} + c = 3\sqrt{x^2+2x} + c$$

Metoda supstitucije

Primjer 9.

$$\int \frac{x^2}{x^2+6}\,dx = \left| \begin{array}{c} x^2+6=t \\ 2x\,dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{dt}{2x}$$

Nije moguće riješiti (ovom) supstitucijom!

Primjer 10.

$$\int \frac{x^3}{x^2+6}\,dx = \left| \begin{array}{c} x^2 + 6 = t \\ 2x\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{x^3}{t}\cdot\frac{dt}{2x} = \int \frac{x^2}{t}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{t-6}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{6}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}t - 3\ln|t| + c = \frac{1}{2}(x^2+6) - 3\ln|x^2+6| + c$$

Metoda supstitucije

Primjer 11.

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ dx = \dfrac{-dt}{\sin x} \end{matrix} \right|$$

$$= \int \frac{\cancel{\sin x}}{t} \cdot \frac{-dt}{\cancel{\sin x}} = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

Metoda supstitucije

Primjer 12.

$$\int \frac{2\ln x - 1}{x} dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\, dx = dt \\ dx = x\, dt \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{2t-1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dt = \int (2t-1) dt = t^2 - t + c$$

$$= \ln^2 x - \ln x + c$$

Linearna supstitucija

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{2x+3} dx = \begin{vmatrix} 2x + 3 = t \\ 2\, dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \begin{vmatrix} ax + b = t \\ a\, dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{a} \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + c$$

Linearna supstitucija

Općenito pravilo za linearnu supstituciju:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$$

Linearna supstitucija

1) $\int e^{2x-1}dx \quad = \frac{1}{2}\, e^{2x-1} + c$

2) $\int \sin(-3x+1)\, dx \quad = \frac{1}{3}\cos(-3x+1) + c$

3) $\int \frac{1}{\cos^2(5x+9)}dx \quad = \frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x+9) + c$

Video materijali

1. Metoda supstitucije:
   https://www.youtube.com/watch?v=_5l-BpumSAE&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=4

   https://www.youtube.com/watch?v=u907r66aEdA&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=5

   https://www.youtube.com/watch?v=O-zoDFohwg4&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=6

Hvala ☺