STRUKTURE PODATAKA I ALGORITMI

Predavanje 10

Ishod 3

1

Homework 01

- https://tinyurl.com/3875uzzy

ALGEBRA BERNAYS

2

Logaritamska složenost

- Tvrdnja: ako binarno stablo ima *n* čvorova, onda je dubina stabla *h* >= $log_2 n$
- Dokaz:
  - Kako 15 čvorova možemo smjestiti u binarno stablo tako da dubina bude što manja?
    - Tako da napravimo savršeno binarno stablo dubine 3
    - Ekvivalentno, ako imamo savršeno stablo dubine 3, u njega stane 15 čvorova
- Zanima nas sljedeće: ako imamo stablo dubine *h*, koliko čvorova stane u njega?

Dokaz logaritamske složenosti (1/2)

- U stablo dubine 0 stane: $2^1 - 1$ (1 čvor)
- U stablo dubine 1 stane $2^2 - 1$ (3 čvora)
- U stablo dubine 2 stane: $2^3 - 1$ (7 čvorova)
- U stablo dubine 3 stane: $2^4 - 1$ (15 čvorova)
- U stablo dubine 4 stane: $2^5 - 1$ (31 čvor)
- …
- U stablo dubine *h* stane: $2^{h+1} - 1$

Dokaz logaritamske složenosti (2/2)

- Dalje računamo:

  $n = 2^{h+1} - 1$

  $n + 1 = 2^{h+1}$

  $log_2(n+1) = h + 1$

  $h = log_2(n+1) - 1 \approx log_2 n$

- Dakle, dubina savršenog binarnog stabla je log*n*
  - Dubina svih ostalih stabala je veća
- Algoritmi koji obrađuju na svakoj razini po jedan čvor mogu postići brzinu Ω(log*n*)
  - Najgori slučaj je *O*(*n*) ako imamo koso stablo
  - Zanimljivo: srednji slučaj je uvijek bliži najboljem, tj. Θ(log*n*)

HRPA

Uvod

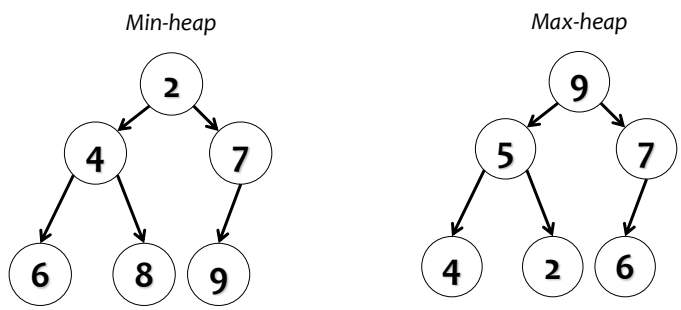
- **Hrpa** ili gomila (engl. *heap*) je struktura podataka koja zadovoljava uvjete:
  - Potpuno je binarno stablo
    - Može biti bilo kakvo potpuno stablo, ali ćemo mi promatrati samo binarna stabla
  - Vrijednost u čvoru roditelju je:
    - Uvijek veća ili jednaka svim vrijednostima djece (engl. *max-heap*), ili
    - Uvijek manja ili jednaka svim vrijednostima djece (engl. *min-heap*)
    - Napomena: primijetimo da se ništa ne kaže o vrijednostima braće
- Hrpa ima veliku važnost i učestalu primjenu u računarstvu:
  - Za implementaciju prioritetnog reda
  - Za primjenu algoritma sortiranja HEAPSORT

ALGEBRA BERNAYS SVEUČILIŠTE

7

Max-heap i *min-heap*

- U *min-heapu* je najmanji element stavljen u korijen stabla
- U *max-heapu* je najveći element stavljen u korijen stabla



- U ostatku predavanja ćemo promatrati *max-heap*
  - *min-heap* varijanta je ekvivalentna u svemu

ALGEBRA BERNAYS SVEUČILIŠTE

8

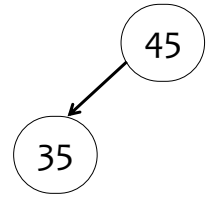
IZGRADNJA POTPUNOG BINARNOG STABLA

Izgradnja potpunog binarnog stabla (1/8)

- Želimo u potpuno binarno stablo smjestiti vrijednosti:
  45, 35, 23, 27, 21, 22, 4, 19

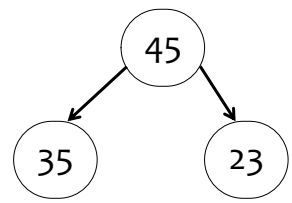
Izgradnja potpunog binarnog stabla (2/8)

- Drugi čvor je uvijek lijevo dijete korijena



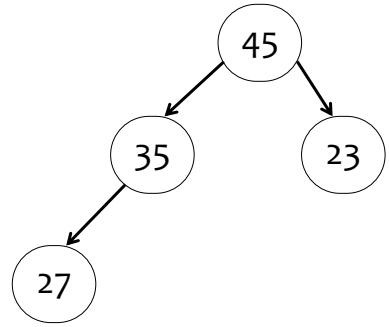
Izgradnja potpunog binarnog stabla (3/8)

- Treći čvor je uvijek desno dijete korijena



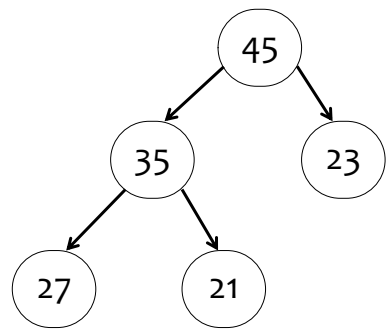
Izgradnja potpunog binarnog stabla (4/8)

- Sljedeći čvor uvijek puni sljedeću razinu s lijeva na desno



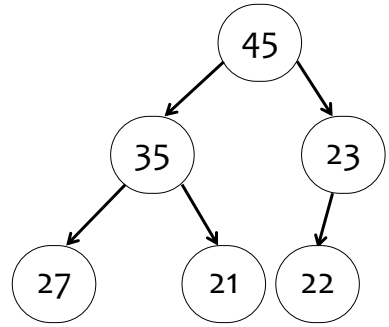
Izgradnja potpunog binarnog stabla (5/8)

- Sljedeći čvor uvijek puni sljedeću razinu s lijeva na desno



Izgradnja potpunog binarnog stabla (6/8)

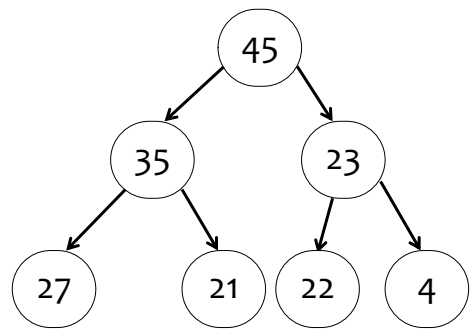
- Sljedeći čvor uvijek puni sljedeću razinu s lijeva na desno



15

Izgradnja potpunog binarnog stabla (7/8)

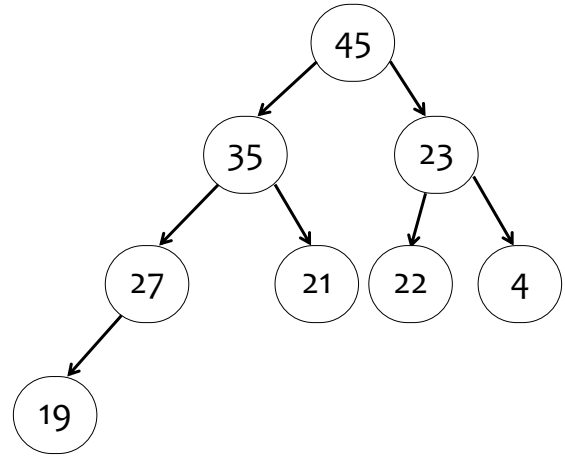
- Sljedeći čvor uvijek puni sljedeću razinu s lijeva na desno



16

Izgradnja potpunog binarnog stabla (8/8)

- Dobili smo potpuno binarno stablo sa 8 čvorova
- Poštujući pravilo da vrijednost roditelja mora biti >= vrijednosti djece, dobili smo hrpu tipa *max-heap*
- Podaci su unaprijed bili tako pripremljeni
- Izgradnja ima složenost $O(n)$



17

DODAVANJE ČVORA U HRPU

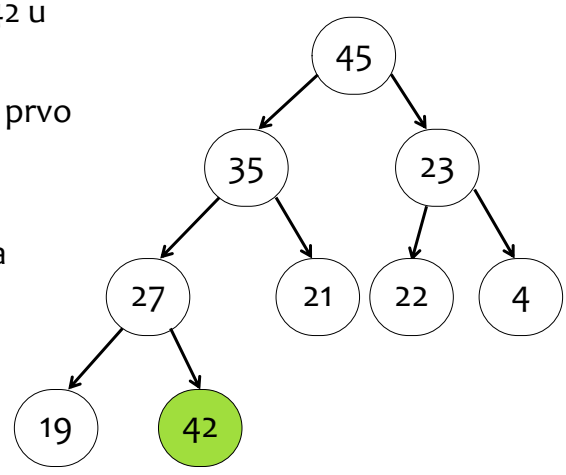
18

Postupak dodavanja

- Za dodavanje čvora u hrpu koristimo sljedeći postupak:
  1. Čvor inicijalno dodajemo na prvo slobodno mjesto prema prethodnim pravilima
  2. Čvor podižemo prema korijenu **zamjenom s roditeljem** sve dok ne dođe na ispravno mjesto

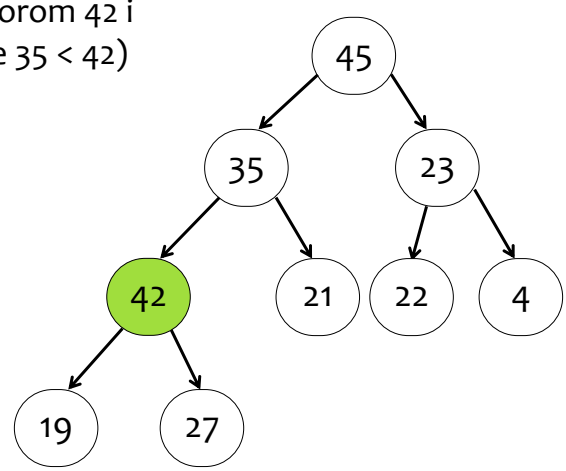
Dodavanje čvora u hrpu (1/3)

- Dodajmo vrijednost 42 u prethodnu hrpu
- Novi čvor stavimo na prvo sljedeće mjesto
- Nadalje, održavamo svojstvo hrpe tako da novi čvor podižemo na gore, zamjenom s njegovim roditeljem, sve dok ne dođe na ispravnu lokaciju



Dodavanje čvora u hrpu (2/3)

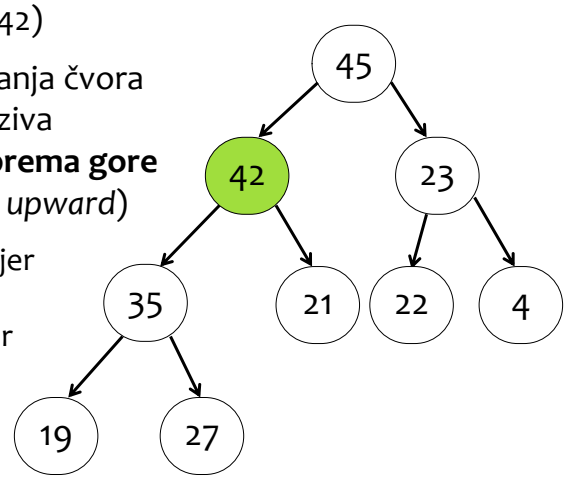
- Nakon zamjene sa čvorom 42 i dalje nije dobro (jer je 35 < 42)



21

Dodavanje čvora u hrpu (3/3)

- Sad je OK (jer je 45 > 42)
- Ovakav proces podizanja čvora prema korijenu se naziva **preuređivanje hrpe prema gore** (engl. *reheapification upward*)
  - Složenost je $O(\log n)$ jer na svakoj razini obrađujemo po 1 čvor



22

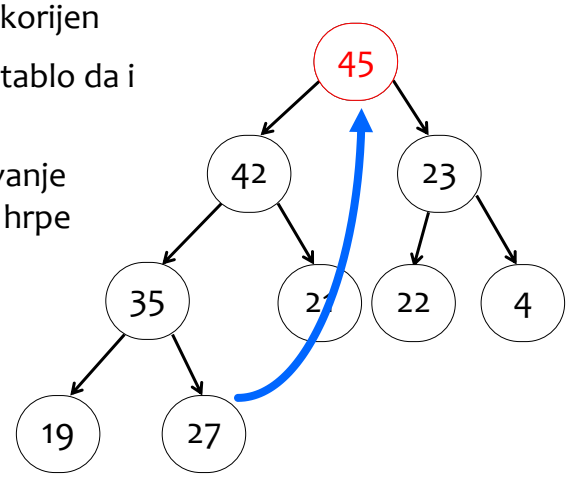
SKIDANJE S VRHA HRPE

Postupak skidanja

- Kod hrpe uvijek čitamo/skidamo element na vrhu
  - To je najveći element na hrpi
- Uklanjanje elementa s vrha hrpe narušava samu strukturu hrpe
  - Potrebno je napraviti neku akciju kako bismo održali svojstvo hrpe
- Postupak:
  1. Uzimamo zadnji čvor i prebacujemo ga u korijen
  2. Čvor spuštamo prema listovima sve dok ne dođe na ispravno mjesto
     - Uvijek ga mijenjamo s većim djetetom (jer je *max-heap*)

Skidanje s vrha hrpe (1/4)

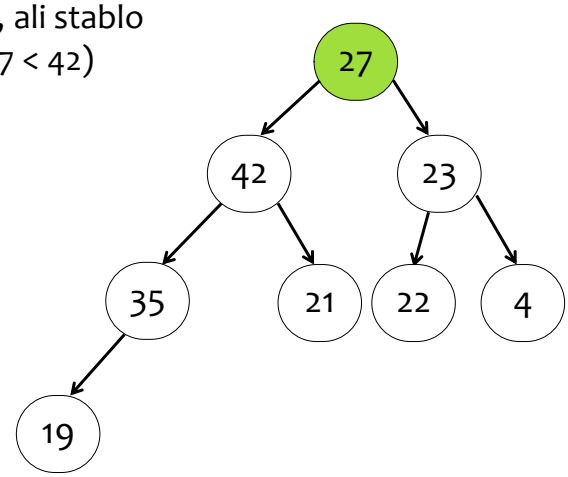
- Uzmemo i obradimo korijen
- Kako sad preurediti stablo da i dalje ostane hrpa?
- Prvi korak je prebacivanje zadnjeg čvora na vrh hrpe



25

Skidanje s vrha hrpe (2/4)

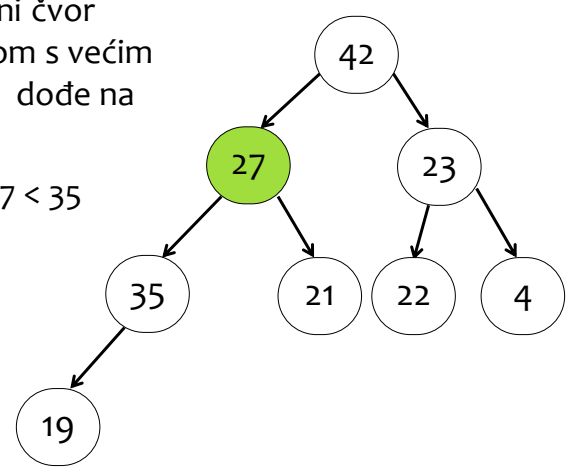
- Sad je čvor prebačen, ali stablo više nije hrpa (jer je 27 < 42)



26

Skidanje s vrha hrpe (3/4)

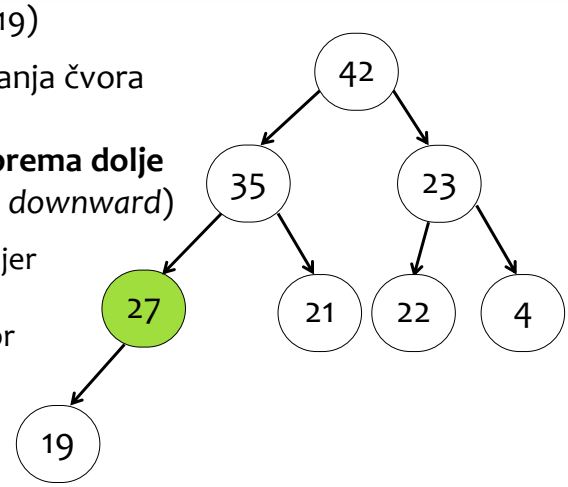
- Spuštamo premješteni čvor prema dolje, zamjenom s većim djetetom, sve dok ne dođe na ispravnu lokaciju
- Još nije dobro jer je 27 < 35



27

Skidanje s vrha hrpe (4/4)

- Sad je OK (jer je 27 > 19)
- Ovakav proces spuštanja čvora prema listu se naziva **preuređivanje hrpe prema dolje** (engl. *reheapification downward*)
  - Složenost je $O(\log n)$ jer na svakoj razini obrađujemo po 1 čvor



28

Rezultat skidanja s hrpe

- Skidanjem s hrpe uništavamo hrpu
  - Jednako kao kod stoga i reda
- Rezultat su padajuće poslagani elementi
  - Za *min-heap* bi bili poslagani rastuće
- Brzina je velika jer je hrpa uvijek optimalno organizirana

DEMO

- http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Heap.html
- Kreirajte *min-heap* hrpu s vrijednostima: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14
- Dodajte vrijednost: 5, 3, 1
- Uklonite korijen hrpe gumbom "Remove Smallest"

PRIORITETNI RED

Uvod

- U praksi je česta situacija da je u jednom redu potrebno definirati određene prioritete
  - Primjerice, kod liječnika se ulazi prema FIFO principu
  - Iznimka su hitni pacijenti (ili oni s vezom) jer oni imaju prednost
    - Kažemo da su to pacijenti višeg prioriteta
  - Ako postoji više pacijenata istog prioriteta, njih liječnik opet rješava po FIFO principu
    - To nije preduvjet za prioritetni red; možemo imati i prioritetne redove koji elemente istog prioriteta obrađuju nekim drugim redom

Prioritetni red

- **Prioritetnim redom** nazivamo FIFO strukturu u kojoj svaki element ima definiran prioritet
  - Prvo se obrađuju elementi najvišeg prioriteta po FIFO principu
  - Nakon toga se na jednak način obrađuju elementi nižeg prioriteta i tako sve do najnižeg prioriteta

Primjena

- Glavne primjene prioritetnog reda su:
  - Algoritmi traženja najkraćeg puta (računalne igre):
    - Dijkstrin algoritam
    - A* algoritam
  - Kompresiranje podataka
  - Sortiranje (*heap* sort)
  - *Task scheduler* u operacijskim sustavima

HRPA U STL

Uvod

- STL nudi dva načina rada s hrpom i prioritetnim redom:
  - Izravna izrada i korištenje hrpe pomoću zaglavlja `<algorithm>`
    - Nešto kompleksniji način
  - Korištenje kontejnera `priority_queue<...>` koji u stvari omata funkcionalnosti hrpe iz zaglavlja `<algorithm>`
    - Nešto jednostavniji način

Izravna izrada i korištenje hrpe (1/3)

- Zaglavlje `<algorithm>` nudi tri funkcije za rad s hrpom:
  - `make_heap(begin, end)`
    - Preslaguje elemente u rasponu [begin, end) tako da formiraju *max-heap*
    - Nakon što funkcija završi, najveći element se garantirano nalazi na mjestu begin
    - Elementi se mogu nalaziti u polju ili objektu tipa `array<T,N>`, `vector<T>` ili `deque<T>`
    - Složenost je $O(n)$

ALGEBRA BERNAYS SVEUČILIŠTE

37

Primjer

```
vector<int> v = { 33, 11, 22, 88, 77, 55, 44, 33, 22, 66 };
make_heap(v.begin(), v.end());

for (unsigned i = 0; i < v.size(); i++) {
    cout << v[i] << " ";
}
cout << endl;
```

- Provjerimo je li ovo zaista hrpa

ALGEBRA BERNAYS SVEUČILIŠTE

38

Izravna izrada i korištenje hrpe (2/3)

- Druga funkcija za rad s hrpom:
  - `push_heap(begin, end)`
    - Smatra se da prilikom poziva funkcije hrpu čine [begin, end – 1) te da se novododani element nalazi na mjestu end
    - Funkcija uzima element na end i stavlja ga na odgovarajuće mjesto (preslagivanje prema gore)
    - Nakon završetka funkcije hrpu čini raspon [begin, end)
    - Složenost je $O(\log n)$
    - Kako možemo shvatiti ovu funkciju: „uzmi zadnji element i prebaci ga gdje treba tako da sve skupa bude hrpa”

Primjer

```
vector<int> v = { 33, 11, 22, 88, 77, 55, 44, 33, 22, 66 };
make_heap(v.begin(), v.end());

v.push_back(99);
for (unsigned i = 0; i < v.size(); i++) {
     cout << v[i] << " ";
}
cout << endl;

push_heap(v.begin(), v.end());
for (unsigned i = 0; i < v.size(); i++) {
     cout << v[i] << " ";
}
cout << endl;
```

Izravna izrada i korištenje hrpe (3/3)

- Treća funkcija za rad s hrpom:
  - `pop_heap(begin, end)`
    - Smatra se da prilikom poziva funkcije hrpu čine [begin, end)
    - Funkcija prebacuje element s pozicije begin na poziciju end – 1 (preslagivanje prema dolje)
    - Nakon završetka funkcije hrpu čine [begin, end – 1)
    - Funkciju možemo shvatiti i ovako: „izbaci element s vrha hrpe pa presloži sve ostale tako da ovo i dalje bude hrpa, samo s jednim elementom manje”

ALGEBRA BERNAYS SVEUČILIŠTE

41

Primjer

```
vector<int> v = { 33, 11, 22, 88, 77, 55, 44, 33, 22, 66 };
make_heap(v.begin(), v.end());

v.push_back(99);
for (unsigned i = 0; i < v.size(); i++) {
     cout << v[i] << " ";
}
cout << endl;

push_heap(v.begin(), v.end());
for (unsigned i = 0; i < v.size(); i++) {
     cout << v[i] << " ";
}
cout << endl;

pop_heap(v.begin(), v.end());
for (unsigned i = 0; i < v.size(); i++) {
     cout << v[i] << " ";
```

ALGEBRA BERNAYS SVEUČILIŠTE

42

PRIORITETNI RED U STL

priority_queue<…>

- Klasa `priority_queue<…>` je kontejnerski adapter
  - Omotač oko sadržanog kontejnera koji ima svojstva hrpe
  - Sadržani kontejner može biti:
    - Vektor (podrazumijevano)
    - Deque
    - Bilo koja naša klasa koja implementira metode:
      - empty()
      - size()
      - front()
      - push_back()
      - pop_back()
      - Klasa mora pružati izravan pristup *i*-tom elementu (iz tog razloga lista ne može biti sadržani kontejner)

Osnovni načini izrade prioritetnog reda

- Osnovni načini izrade prioritetnog reda su:
  - `priority_queue<int> jedan;`
    - Izrađuje prazni prioritetni red podržan vektorom
  - `priority_queue<int, deque<int>> dva;`
    - Izrađuje prazni prioritetni red podržan deque-om
  - ```
    vector<int> v({ 11, 22, 33 });
    priority_queue<int> tri(v.begin(), v.end());
    ```
    - Izrađuje prioritetni red podržan vektorom i u njega kopira i slaže elemente iz raspona [begin, end)
- „The constructor … calls … make_heap on the range that includes all its elements …”

Korištenje prioritetnog reda (1/2)

- `pq.push(val)` dodaje kopiju od `val` na odgovarajuće mjesto u prioritetnom redu
  - „This member function effectively calls … push_back of the underlying container object, and then reorders it to its location in the heap by calling the push_heap algorithm …”
- `pq.pop()` uklanja element s najvišim prioritetom (onaj na vrhu hrpe)
  - „This member function effectively calls … pop_heap algorithm to keep the heap property of priority_queues and then calls the member function pop_back of the underlying container object to remove the element”
    ```

Korištenje prioritetnog reda (2/2)

- `pq.top()` vraća referencu na element s najvišim prioritetom (onaj na vrhu hrpe)
- `pq.size()` vraća broj elemenata u prioritetnom redu
- `pq.empty()` vraća je li prioritetni red prazan ili ne

SLOŽENIJA PRIMJENA PRIORITETNOG REDA

Gdje su tu prioriteti?

- Prethodni primjeri pretpostavljaju da je vrijednost koja se čuva u redu jednaka prioritetu
  - Možemo li, primjerice, u redu čuvati e-mail poruke od kojih svaka ima neki prioritet?
- Da bismo u prioritetnom redu mogli čuvati bilo kakve podatke, moramo dati odgovor na sljedeće pitanje:
  - Ako imamo dva objekta nekog tipa, koji je od njih manji?
- Najlakši način je definirati komparator:

```
struct MladjiImajuPrioritet {
  bool operator()(Osoba& o1, Osoba& o2) {
    return o1.godina_rodjenja < o2.godina_rodjenja;
  }
};
```

Operator poziva funkcije

Složeniji način izrade prioritetnog reda

- Kad imamo definiran komparator, možemo kreirati prioritetni red na sljedeći način:

```
priority_queue<
    Osoba,
    vector<Osoba>,
    MladjiImajuPrioritet> pqosobe;
```

- Izrađuje prazni prioritetni red podržan vektorom pri čemu se za definiranje prioriteta koristi MladjiImajuPrioritet

Zadaci

1. Neka je zadan vektor od 10 elemenata. Koristeći prioritetni red, ispišimo elemente u sortiranom redoslijedu, od većih prema manjim.
2. Promijenite prethodni zadatak tako da brojevi budu ispisani od manjih prema većim (*min-heap*)
3. Napravimo program koji koristi prioritetni red za obradu zaprimljenih poruka prema prioritetima (1 = minimalni, 2 = normalni, 3 = visoki prioritet). Zaprimimo nekoliko poruka pa ih obradimo ispisivanjem na ekran.

Rješenje zadatka 1

```
vector<int> brojevi({ 17, 6, 99, 52, 11, 1, 8, 15, 7, 23 });

priority_queue<int> pq(brojevi.begin(), brojevi.end());

while (!pq.empty()) {
    cout << pq.top() << endl;
    pq.pop();
}
```

Rješenje zadatka 2

```
#include <functional>
…

vector<int> brojevi({ 17, 6, 99, 52, 11, 1, 8, 15, 7, 23 });

priority_queue<int, vector<int>, greater<int>>
                          pq(brojevi.begin(), brojevi.end());

while (!pq.empty()) {
    cout << pq.top() << endl;
    pq.pop();
}
```


Rješenje zadatka 3 (klase)

```
struct Message {
    string subject;
    string body;
    int priority;

    Message(string subject, string body, int priority) {
        this->subject = subject;
        this->body = body;
        this->priority = priority;
    }
};

struct HigherToLowerPriorityComparator {
    bool operator() (Message& m1, Message& m2) {
        return m1.priority < m2.priority;
    }
};
```

Rješenje zadatka 3 (main)

```
priority_queue<Message, vector<Message>,
HigherToLowerPriorityComparator> pq;
pq.push(Message("Macka lovi lopticu",
    "Pogledaj ovaj fora video :)", 1));
pq.push(Message("Sutra me nema",
    "Uzet cu jedan dan GO", 2));
pq.push(Message("Hitan sastanak",
    "Za 30 minuta, soba 204, obavezno doci.", 3));

while (!pq.empty()) {
    cout << pq.top().subject << " " << pq.top().priority <<
endl;
    pq.pop();
}
```


Dodatni materijali

- Dodatni materijali su dostupni na:
  - Heap and priority queue as ADTs
    - https://youtu.be/zYo-vCiUKuM
  - Heap and priority queue in STL
    - https://youtu.be/fOige4fHPMA