MATEMATIKA
Vježbe

2. ishod

Skupovi

Skupove zadajemo:

1) nabrajanjem njegovih elemenata koji su odvojeni zarezom, npr:

$$S = \{a, 1, \{1\}\}$$

2) uvjetom koji njegovi elementi ispunjavaju

$$S = \{x : x \text{ je pozitivan paran broj manji od } 7\}$$

Pripadnost: $x \in S$ (element x pripada skupu S)

Podskup - kažemo da je skup A podskup skupa B ako su svi elementi skupa A ujedno i elementi skupa B; oznaka $A \subseteq B$.

Skupovi

Prazan skup - skup koji ne sadrži niti jedan element; oznaka $\emptyset$

- prazan skup je podskup svakog skupa

Partitivni skup skupa A

- skup svih podskupova skupa A; oznaka $P(A)$
- ako skup A ima n elemenata, tada partitivni skup ima 2^n elemenata

$$|A| = n \qquad \Rightarrow \qquad |P(A)| = 2^n$$

Kartezijev produkt skupova A i B

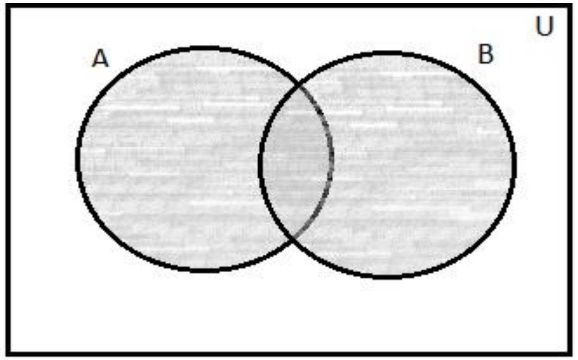
- skup svih uređenih parova, kod kojih je prvi element iz skupa A, a drugi element iz skupa B; oznaka $A \times B$

$$|A| = n, \qquad |B| = m \qquad \Rightarrow \qquad |A \times B| = n \cdot m$$

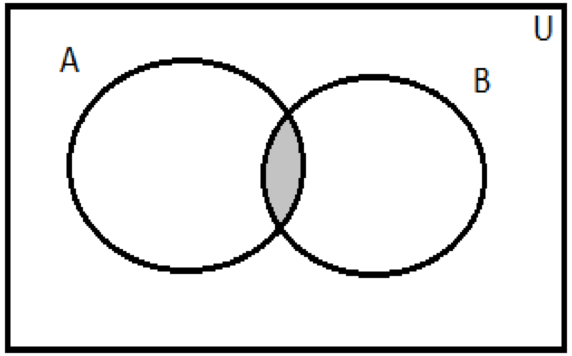
Skupovi

Operacije sa skupovima:

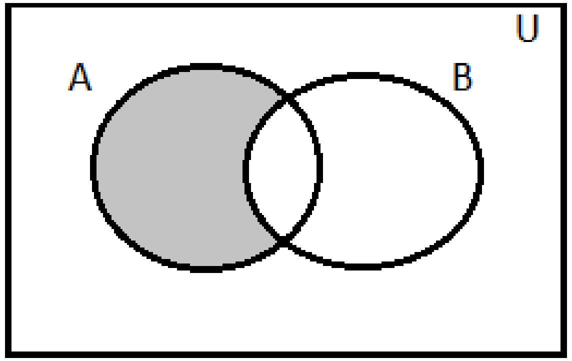
1) UNIJA SKUPOVA A i B:
skup koji se sastoji od svih elemenata skupa A i skupa B; oznaka $A \cup B$



2) PRESJEK SKUPOVA A i B:
skup koji se sastoji od zajedničkih elemenata skupova A i B; oznaka $A \cap B$



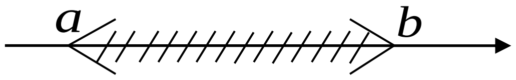
3) RAZLIKA SKUPOVA A i B :
skup koji se sastoji od elemenata skupa A koji nisu u skupu B; oznaka $A \backslash B$



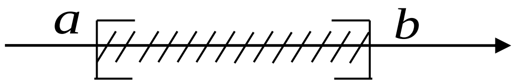
Skupovi

Intervali realnih brojeva:

1) otvoreni interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

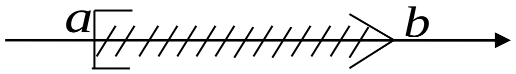


2) zatvoreni interval $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

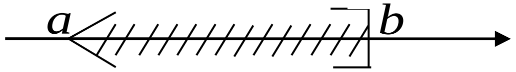


3) poluotvoreni (poluzatvoreni) interval

$$[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

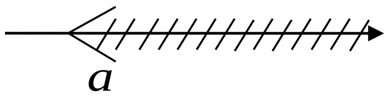


$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

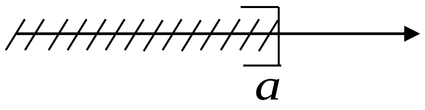


- još neki primjeri:

$$\langle a, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$



$$\langle -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$



Zadaci

5.1. Jesu li istinite sljedeće tvrdnje i zašto?

a) $1 \in \{1, 2, 3\}$

b) $\{1\} \in \{\{1\}, 2, 3\}$

c) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$

d) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$

e) $\{1, 2\} \in \{\{1,2\}, 2\}$

f) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$

5.2. Jesu li istinite sljedeće tvrdnje i zašto?

a) $1 \subset \{1, 2, 3\}$

b) $\{1\} \subset \{\{1\}, 2, 3\}$

c) $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$

d) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

e) $\{1, 2\} \subset \{\{1,2\}, 2\}$

f) $\{1, 2\} \subset \{\{1\}, \{2\}\}$

g) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

h) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

i) $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$

Zadaci

5.3. Neka je zadan skup $S = \{3, \{4\}, \{4, 5\}\}$. Jesu li istinite sljedeće tvrdnje i zašto?

a) $4 \in S$

b) $\{4\} \subseteq S$

c) $\{3\} \subseteq S$

d) $\{4, 5\} \in S$

e) $\{4, 5\} \subset S$

f) $\{\{4, 5\}\} \subset S$

g) $\{\{4\}, 3\} \subset S$

h) $\{\{4, 5\}, 4\} \subseteq S$

i) $\emptyset \in S$

5.4. Za skup S iz prethodnog zadatka odredite $|S|$.

Zadaci

5.5. Odredite partitivne skupove sljedećih skupova:

a) $S = \{1\}$ b) $S = \{1, 2\}$ c) $S = \{1, \{2\}, 3\}$ d) $S = \{\{1\}, \{1, 2\}, 2\}$

5.6. Odredite $A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B,\ B \backslash A$ za sljedeće skupove:

a) $A = \langle 3,4 \rangle, \qquad B = [2,5]$

b) $A = [1, \infty\rangle, \qquad B = \langle 1, 3]$

c) $A = \{1,3\}, \qquad B = [2,4]$

d) $A = [-3, 1\rangle, \qquad B = \{-1, 0, 1\}$

Zadaci

5.7. Odredite

$$(A \cup B) \cap C, \qquad (C \setminus B) \cap A, \qquad A \setminus (B \cap C)$$

ako su zadani skupovi:

a) $A = [2, 5\rangle, \qquad B = \langle -1, 3], \qquad C = \langle 0, 2\rangle$

b) $A = [-2, 4], \qquad B = [2, 3\rangle, \qquad C = \{-2, 0, 2, 4\}$

5.8. Odredite za Kartezijev produkt skupova:

a) $A \times B$, ako je $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$

b) $B \times A$, ako je $A = \{1, \{1\}\}, B = \{1, \{1, 2\}\}$

c) $A \times P(A)$, ako je $A = \{a, b\}$

Knjiga „*Matematika za IT*”, QR kod str. 88.

Nizovi

Niz u skupu S je svaka funkcija $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{N} \to \boldsymbol{S}$. Ona svakom prirodnom broju n pridružuje element $a(n)$ iz skupa S.

Oznaka: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \dots$

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$$

Element $\boldsymbol{a_n}$ nazivamo **$\boldsymbol{n}$-ti član niza**.

Ako je $\boldsymbol{S} \subset \mathbb{R}$, govorimo o nizu u skupu $\mathbb{R}$ ili o **nizu realnih brojeva**.

Poznati nizovi: aritmetički niz,
geometrijski niz,
Fibbonacijev niz…

Nizovi

Niz može biti zadan:		
DIREKTNIM NAVOĐENJEM ČLANOVA	OPĆIM ČLANOM	REKURZIVNO
Primjer 1. $\mathbf{3, 5, 7, 9, 11, \ldots}$ Primjer 2. $\mathbf{60, 30, 20, 15, 12, \ldots}$	Primjer 1. $\boldsymbol{a_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}}$ Primjer 2. $\boldsymbol{a_n = \sin \pi n, n \in \mathbb{N}}$	Primjer. $\boldsymbol{a_1 = 1,}$ $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + 1, \quad n \geq 1}$
RIJEČIMA		
Primjer . “*Započni brojem* 1. *Broj uvećaj za* 1 i *za njegov redni broj u nizu.*”		

ALGEBRA

Aritmetički niz

Niz $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ je **aritmetički niz** ako je razlika svaka dva uzastopna člana jednaka.

$$\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_3} - \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{a_{n-1}} = d, \quad n > 1$$

Taj broj nazivamo **razlika** (prirast niza) te ga označavamo s *d*.

Dodavanjem *d* bilo kojem članu dobivamo sljedeći član aritmetičkog niza.

Razlikujemo **padajući** i **rastući** aritmetički niz ovisno o *d*.

Primjer rastućeg: 1, 4, 7, 10...
Primjer padajućeg: 0, –1, –2, –3...

Aritmetički niz

U aritmetičkom nizu, razlika susjednih članova je konstantna i jednaka je $\boldsymbol{d}$.

$$a_{n+1} - a_n = d, \qquad n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{R}$$

Aritmetički niz zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = a, \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Opći član aritmetičkog niza:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Suma aritmetičkog niza:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d)}$$

Zadaci

6.1 Odredite prvih pet članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je:

a) $a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 1, \qquad n \geq 2$

b) $a_1 = 3, \qquad a_n = 2a_{n-1} - n, \qquad n \geq 2$

c) $a_1 = 2, \qquad a_n = \dfrac{n^2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 2$

6.2 Odredite prvih šest članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je:

a) $a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad n \geq 2$

b) $a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad n \geq 2$

Zadaci

6.3. Napišite prvih pet članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kojem je zadana formula za opći član niza:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dokažite da je zadani niz rastući (pokažite da vrijedi $a_{n+1} > a_n$).

6.4. Napišite prvih pet članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kojem je zadana formula za opći član niza:

$$a_n = \frac{1}{4}\cdot(-2)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dokažite da je zadani niz alternirajući (pokažite da vrijedi $a_{n+1}\cdot a_n < 0$).

Zadaci

Opći član aritmetičkog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Suma aritmetičkog niza:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d)$$

6.5. Nađite opći član aritmetičkog niza ako je:

a) $a_2 = -1,\ a_5 = 5$

b) $a_2 = -3,\ a_7 - a_6 = 2$

c) $a_2 + a_4 = 2,\ a_2 \cdot a_3 = -2$

6.6. Odredite sumu prvih n članova aritmetičkog niza ako je:

a) $a_3 = 8,\ a_7 = 20$

b) $a_2 \cdot a_4 = \frac{3}{4},\ \frac{a_6}{a_4} = -1,\ d < 0$

c) $a_7 = a_1^2,\ a_6 = a_4 - 2a_3,\ d > 0$

Geometrijski niz

U geometrijskom nizu, kvocijent susjednih članova je konstantan i jednak je $\boldsymbol{q}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad q \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$$

Geometrijski niz zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = a, \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}$$

Razlikujemo **padajući** i **rastući,** te **alternirajući** geometrijski niz ovisno o q i a.

a) Primjer rastućeg niza ($q > 1, a > 0$): $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16, \ldots$

b) Primjer padajućeg niza ($q < 1, a > 0$): $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

c) Primjer alternirajućeg niza ($q < 0, a > 0$): $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

ALGEBRA

Geometrijski niz

U geometrijskom nizu, za svaka tri uzastopna člana vrijedi:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}, n > 1$$

Geometrijski niz zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = a,\ \ a \in \mathbb{R}$$
$$a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Opći član geometrijskog niza:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$$

Suma geometrijskog niza:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$$

Zadaci

Opći član geometrijskog niza:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Suma geometrijskog niza:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

6.7. Nađite peti član geometrijskog niza ako je:

a) $a_2 = \frac{5}{2},\ a_3 = \frac{25}{2}$

b) $a_3 = -\frac{1}{4},\ \frac{a_{10}}{a_7} = -\frac{1}{8}$

c) $a_3 = 2a_1 - a_2,\ \ a_3 + a_5 = 2$

6.8. Odredite sumu prvih pet članova geometrijskog niza ako je:

a) $a_1 - a_2 = 35,\ \ a_3 - a_4 = 140,\ \ q > 0$

b) $a_2 \cdot a_4 = \frac{16}{9},\ a_1 + a_2 = 16,\ \ \ a_1, q > 0$

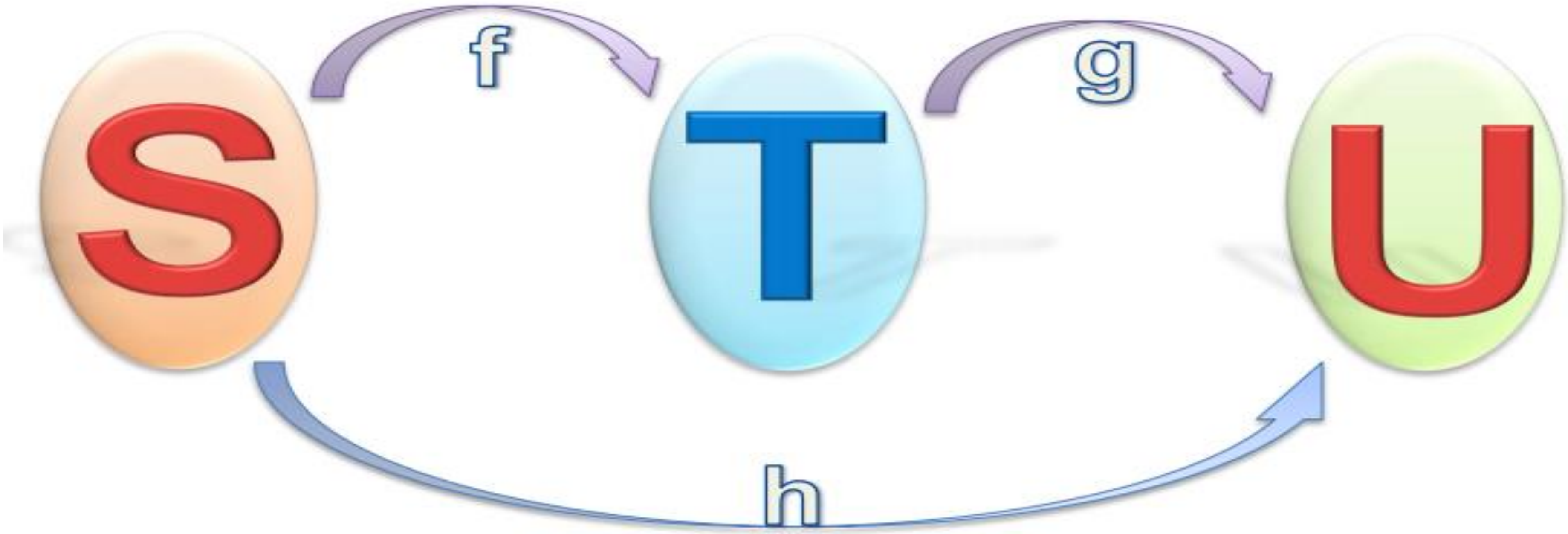
Knjiga „*Matematika za IT*”, QR kod str. 102.

Kompozicija funkcije

Kompozicija funkcije $f : S \to T$ i $g : T \to U$ **je funkcija** $h : S \to U$ definirana sa

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

za svaki $x \in S$ i označavamo je sa $h = g \circ f$



Zadaci

7.1. Odredite kompoziciju $f \circ g,\ g \circ f,\ f \circ f\ \ i\ g \circ g$ za funkcije

a) $f(x) = 2x - 3,\qquad g(x) = x + 3$

b) $f(x) = \sqrt{x - 1},\qquad g(x) = 4x + 1$

7.2. Odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$ za zadane funkcije.
Odredite domenu dobivene kompozicije.

a) $f(x) = x^2,\qquad g(x) = \cos x$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x},\qquad g(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{2 - x}{3x - 1},\qquad g(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$

Zadaci

7.3. Odredite domenu sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x-7}{x^2+4x-5}$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

7.4. Odredite područje definicije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{2x-5}$

b) $f(x) = \sqrt{2x^2+x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{-x^2-1}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2-1}$

e) $f(x) = \sqrt{x-x^3}$

Zadaci

7.5. Odredite domenu sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{2-x}{3x+2}}$

c) $f(x) = e^{\sqrt[3]{\frac{2-x}{3x+2}}}$

7.6. Odredite područje definicije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{x+3}{2} - 2^x + \log 2$

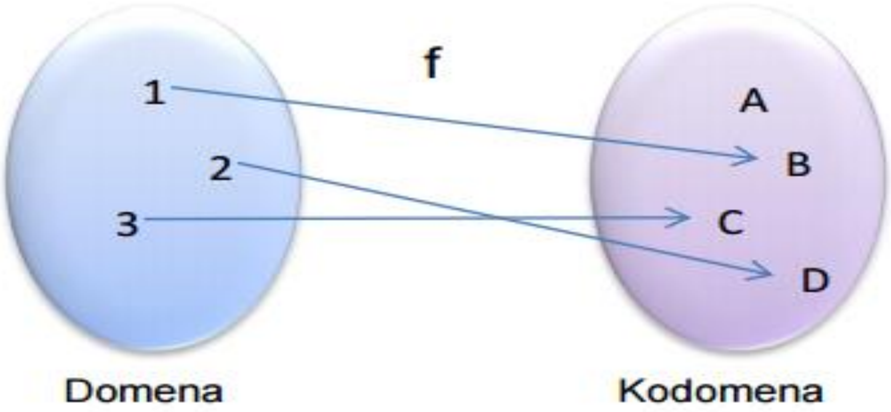
b) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} + e^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1)$

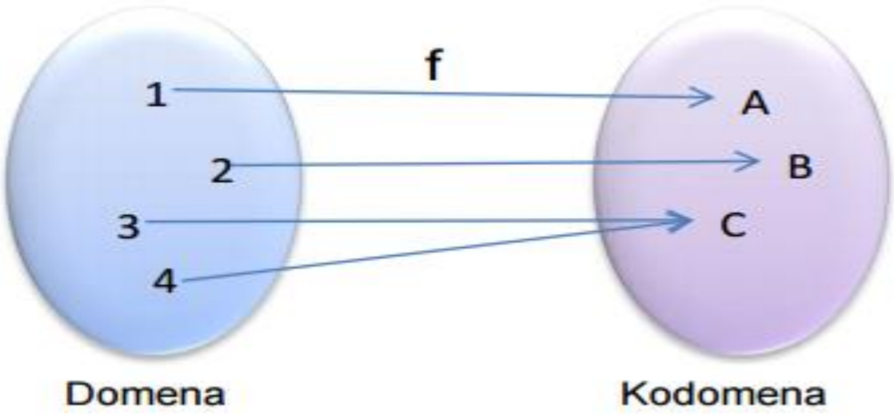
d) $f(x) = \frac{x-2}{\log(x-3) - 1} + x - 1$

Injekcija, surjekcija, bijekcija

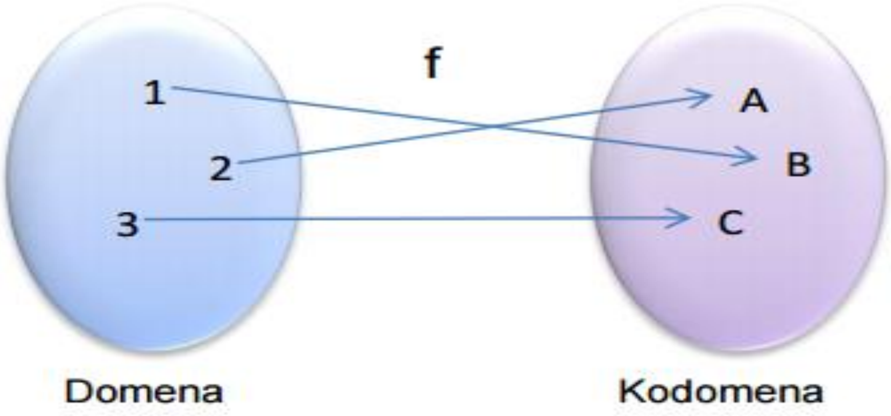
Injekcija



Surjekcija



Bijekcija



Zadaci

8.1. Zadana je funkcija $f: D \to K$. Odredite njenu domenu u kodomenu tako da funkcija bude bijekcija. Skicirajte graf zadane funkcije.

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = 3 - x$

c) $f(x) = 2$

d) $f(x) = -x^2$

e) $f(x) = x^2 - 2x$

f) $f(x) = e^x + 1$

g) $f(x) = \log_2(x - 1)$

h) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

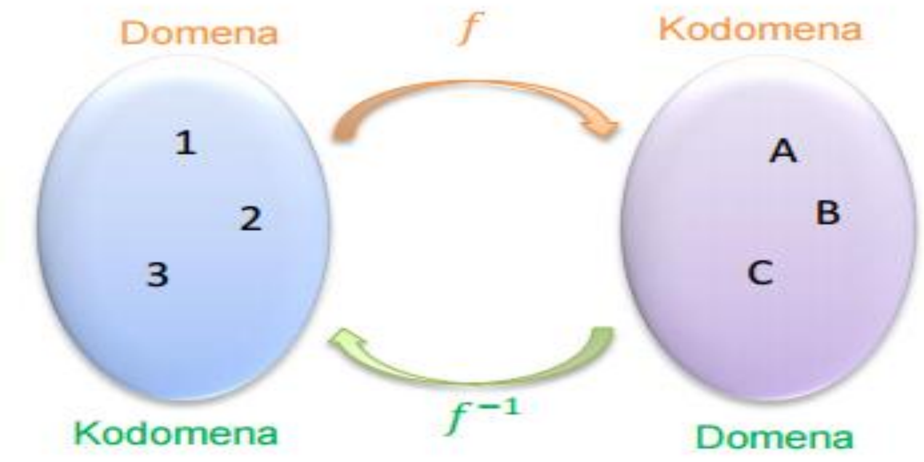
Inverzna funkcije

Ako je funkcija **bijekcija**, onda ima **inverznu funkciju**.

Inverzna funkcija funkcije $f: S \to T$ je funkcija $g: T \to S$ takva da je

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x,$$

za svaki $x \in S$ i **označavamo ju sa $\boldsymbol{f^{-1}}$**.



Zadaci

8.2. Odredite sva rješenja jednadžbi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ako je:

a) $f(x) = x - 2,\qquad g(x) = x^2 - x + 3$

b) $f(x) = 2x - 3,\qquad g(x) = 2x^2 - x + 1$

8.3. Odredite inverzne funkcije zadanih funkcija. Rješenje provjerite kompozicijom.

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ c) $f(x) = \sqrt{\log(x+1)}$

8.4. Odredite inverzne funkcije zadanih funkcija.

a) $f(x) = \frac{2-x}{2x+3}$ b) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ c) $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

Knjiga „*Matematika za IT*”, QR kod str. 122.

Hvala na pažnji!