MATEMATIKA
Vježbe

4. ishod

Vektori u koordinatnom sustavu

Radij vektor (radijus vektor) točke $A(x, y, z)$ je vektor s početkom u ishodištu i s krajnjom točkom u točki A.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} \;\; = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ - jedinični radij vektori smjera koordinatnih osi.

Koordinatni prikaz vektora s početnom točkom $A(x_1, y_1)$ i završnom $B(x_2, y_2)$ je:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\,\vec{\jmath} \;\; = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Vektorske jednadžbe krivulja

Pravac u ravnini zapisujemo vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

gdje je $\overrightarrow{r_A}$ radij vektor jedne točke na pravcu, a $\vec{s}$ vektor smjera tog pravca.

Pravac $y = k \cdot x + l$ ima vektor smjera $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$.

Dužinu $\overline{AB}$ u ravnini zapisujemo vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \overrightarrow{AB}, \qquad t \in [0, 1]$$

gdje je $\overrightarrow{r_A}$ radij vektor točke A.

Graf funkcije $\boldsymbol{y = f(x)}$ zapisujemo vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in D_f$$

Vektorske jednadžbe krivulja

Kružnicu sa središtem u ishodištu i polumjerom R zapisujemo vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi\rangle$$

Elipsu sa poluosima a i b zapisujemo vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi\rangle$$

Preslikavanja ravnine

Translacija za vektor $\vec{t}$:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{t}$$

Osna simetrija:

- simetrija obzirom na x-os: $\vec{r}' = O_x \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- simetrija obzirom na y-os: $\vec{r}' = O_y \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Rotacija za kut α (pozitivan smjer rotacije je smjer suprotan kretanju kazaljke na satu):

$$\vec{r}' = R \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Preslikavanja ravnine

Skaliranje za faktor k:

- u smjeru x-osi: $\vec{r}' = S_x \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- u smjeru y-osi: $\vec{r}' = S_y \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Objekt se rasteže za $k > 1$, a sažima za $0 < k < 1$.

Zadaci

13.1. Zapišite vektorsku jednadžbu pravca koji:

a) prolazi točkama $A(1,-2)$ i $B(-3,1)$

b) koji je zadan jednadžbom $y = 2x - 1$

c) prolazi točkom $A(3,1)$ paralelan je pravcu $2y - x + 3 = 0$

13.2. Zapišite vektorsku jednadžbu dužine

a) od točke $A(3,0)$ do točke $B(-2,2)$

b) od točke $A(2,-1)$ do točke $B(0,4)$

Zadaci

13.3. Zapišite eksplicitnu jednadžbu pravca koji je zadan vektorski:

a) $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ -3t \end{bmatrix}$ b) $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 + t \\ 1 - 2t \end{bmatrix}$

13.4. Dužinu $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ 2 + t \end{bmatrix}, t \in [0, 1]$ translatirajte za vektor $\vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Nacrtajte obje dužine u koordinatnoj ravnini.

13.5. Zapišite vektorsku jednadžbu kružnice sa središtem u ishodištu, koja prolazi točkom $T\left(1, \sqrt{3}\right)$. Translatirajte dobivenu kružnicu tako da joj je središte u točki T.

13.6. Zapišite vektorsku jednadžbu parabole $y = x^2$. Translatirajte tu parabolu tako da nova parabola ima nultočke $x_{1,2} = \pm 1$.

Zadaci

13.7. Dužinu $\vec{r} = \begin{bmatrix} -t \\ 3-2t \end{bmatrix}, t \in [0,1]$ preslikajte preko x-osi. Nacrtajte obje dužine u koordinatnoj ravnini

13.8. Zapišite vektorsku jednadžbu kružnice sa središtem u točki $S(1,1)$ polumjera $R = 1$. Preslikajte dobivenu kružnicu preko y-osi. Nacrtajte obje kružnice u koordinatnoj ravnini.

13.9. Zapišite vektorsku jednadžbu pravca $y = x$. Rotirajte pravac oko ishodišta:

a) $90°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu

b) $60°$ u smjeru kazaljke na satu

c) $40°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu

Zadaci

13.10. Pravac $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 2-t \end{bmatrix}$

a) rastegnite u smjeru x-osi za faktor $k_x = 2$

b) sažmite u smjeru y-osi za faktor $k_y = \frac{1}{3}$.

Nacrtajte sva tri pravca u koordinatnoj ravnini.

13.11. Napišite opću i vektorsku jednadžbu kružnice sa središtem u ishodištu polumjera 2.
Kako treba transformirati tu kružnicu kako bi ju preslikali u elipsu $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$? Provedite opisano preslikavanje. Skicirajte obje krivulje u ravnini.

Vektori u koordinatnom sustavu

Radij vektor (radijus vektor) točke $A(x, y, z)$ je vektor s početkom u ishodištu i s krajnjom točkom u točki A.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \ = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - jedinični radij vektori

Koordinatni prikaz vektora s početnom točkom $A(x_1, y_1, z_1)$ i završnom $B(x_2, y_2, z_2)$ je:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k} \ = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Pravac u prostoru

Pravac u prostoru zapisujemo vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

gdje je $\overrightarrow{r_A}$ radij vektor jedne točke na pravcu, a $\vec{s}$ vektor smjera tog pravca.

Kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{\boldsymbol{x - x_A}}{\boldsymbol{s_x}} = \frac{\boldsymbol{y - y_A}}{\boldsymbol{s_y}} = \frac{\boldsymbol{z - z_A}}{\boldsymbol{s_z}}$$

gdje je $A(x_A, y_A, z_A)$ točka na pravcu, a $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix}$ vektor smjera tog pravca.

Pravci su **paralelni**, ukoliko imaju jednake ili proporcionalne vektore smjera: $\overrightarrow{s_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{s_2}$

Pravci su **okomiti**, ukoliko imaju međusobno okomite vektore smjera:

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0$$

Zadaci

14.1. Zapišite vektorsku jednadžbu pravca koji:

a) prolazi točkama $A(1,-2,2)$ i $B(0,-3,1)$

b) koji je zadan jednadžbom $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1}$

c) prolazi točkom $A(3,-2,1)$ i paralelan je pravcu $\vec{r}=\begin{bmatrix}2-t\\1+3t\\-2\end{bmatrix}$

14.2. Zapišite kanonsku jednadžbu pravca

a) koji prolazi kroz točke $A(3,-1,0)$ i $B(-1,-2,2)$

b) koji je zadan jednadžbom $\vec{r}=\begin{bmatrix}-t\\2\\1-3t\end{bmatrix}$

Zadaci

14.3. Odredite presjecište pravaca:

a) $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2-3t \\ 2+t \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 4-4t \\ 4 \\ -1+2t \end{bmatrix}$

b) $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-2}{1}$ i $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$

c) $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2-2t \\ 1 \\ 1+3t \end{bmatrix}$ i $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$

d) $\vec{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2+t \\ 5t \end{bmatrix}$ i $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{0}$

Zadaci

14.4. Odredite parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da:

a) su pravci $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2-t \\ 2+t \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 4-\alpha\, t \\ 2t \\ -1+3\alpha\, t \end{bmatrix}$ okomiti.

b) su pravci $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-2}{1}$ i $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{2\alpha} = \frac{z+1}{-2}$ paralelni.

c) se pravci $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ t \\ -1-t \end{bmatrix}$ i $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-\alpha}{2} = \frac{z+1}{-1}$ sijeku.

14.5. Pravci $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2-t \\ 3 \\ 2t \end{bmatrix}$ i $\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1+3\,t \\ 3-t \\ 2 \end{bmatrix}$ se sijeku u točki $T(1,3,2)$. Odredite kanonsku jednadžbu pravca kroz tu točku, koji je okomit na oba pravca.

Ravnina u prostoru

Ravninu u prostoru zapisujemo vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + u \cdot \overrightarrow{s_1} + v \cdot \overrightarrow{s_2}, \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

gdje je $\overrightarrow{r_A}$ radij vektor jedne točke na ravnini, a $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ vektori smjera te ravnine.

Normala ravnine $\vec{n}$ je vektor okomit na tu ravninu:

$$\vec{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}$$

Opća jednadžba ravnine:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$

gdje je $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normala te ravnine.

Opća jednadžba ravnine kroz točku $T(x_0, y_0, z_0)$ i s normalom $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ravnina u prostoru

Pravac s vektorom smjera $\vec{s}$ je **paralelan** s ravninom, ukoliko je vektor smjera $\vec{s}$ okomit na normalnu ravnine $\vec{n}$.

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$$

Pravac je **okomit** na ravninu ukoliko mu je smjer $\vec{s}$ proporcionalan vektoru normale $\vec{n}$.

$$\vec{s} = \lambda \cdot \vec{n}$$

Dvije ravnine su **paralelne** ukoliko su im vektori normale proporcionalni:

$$\overrightarrow{n_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_2}.$$

Ukoliko ravnine nisu paralelne, tada im je **presjek** pravac, za čiji vektor smjera vrijedi:

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}.$$

Udaljenost točke $T(x_0, y_0, z_0)$ do ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Zadaci

14.6. Zapišite vektorsku jednadžbu ravnine koja:

a) prolazi točkama $A(1,0,2)$, $B(0,-3,1)$ i $C(-2,1,1)$.

b) ima opću jednadžbu $3x-2y+z-2=0$.

c) prolazi točkom $A(0,-2,2)$ i paralelna je ravnini $\vec{r}=\begin{bmatrix} 2-u \\ 1+v \\ -2u+3v \end{bmatrix}$

14.7. Zapišite opću jednadžbu ravnine

a) koja prolazi kroz točke $A(3,-1,0)$, $B(-1,0,2)$ i $C(2,1,-1)$.

b) koja je zadana vektorskom jednadžbom $\vec{r}=\begin{bmatrix} 1-v \\ 2+u+v \\ 3 \end{bmatrix}$.

Zadaci

14.8. Odredite presjecište ravnina. Rješenje zapišite u kanonskom obliku.

a) $2x - y + z = 0$ i $x + 2y - z + 2 = 0$

b) $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2-u \\ 2+v \\ u+v \end{bmatrix}$ i $\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1-u \\ 2+v \end{bmatrix}$

14.9. Jesu li zadani pravac i ravnina paralelni ili okomiti?

a) $x - 2y - z + 2 = 0$ i $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$

b) $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2+u \\ 3+2v \\ -2u-3v \end{bmatrix}$ i $\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1-2t \\ \frac{3}{2}t \\ 2-t \end{bmatrix}$

Zadaci

14.10. Odredite presjecište zadane ravnine i pravca.

a) $2x - y + 3z + 2 = 0$ i $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2-t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1+u+2v \\ v \\ 2-u+v \end{bmatrix}$ i $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

14.11. Zadana je ravnina, i njoj paralelni pravac. Odredite udaljenost zadane ravnine i pravca.

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1-u \\ 2+u+2v \\ 3-v \end{bmatrix} \text{ i } \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1-2t \\ 0 \\ -1+t \end{bmatrix}$$

Zadaci

12.7. Odredite realni broj *t* tako da vektori budu okomiti:

a) $\vec{a} = t\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ -t \\ t+1 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ t+7 \\ -2 \end{bmatrix}$

12.8. Za $\vec{a} = (1,1,0)$ i $\vec{b} = (-1,2,1)$ odredite:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $\vec{b} \times \vec{a}$ c) $2\vec{a} \times 3\vec{b}$

12.9. Odredite površinu trokuta i paralelograma razapetih vektorima

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Knjiga „*Matematika za IT*”, QR kod str. 172.

Hvala na pažnji!