MATEMATIČKA ANALIZA

Monotonost, ekstremi i zakrivljenost funkcije

Intervali monotonosti

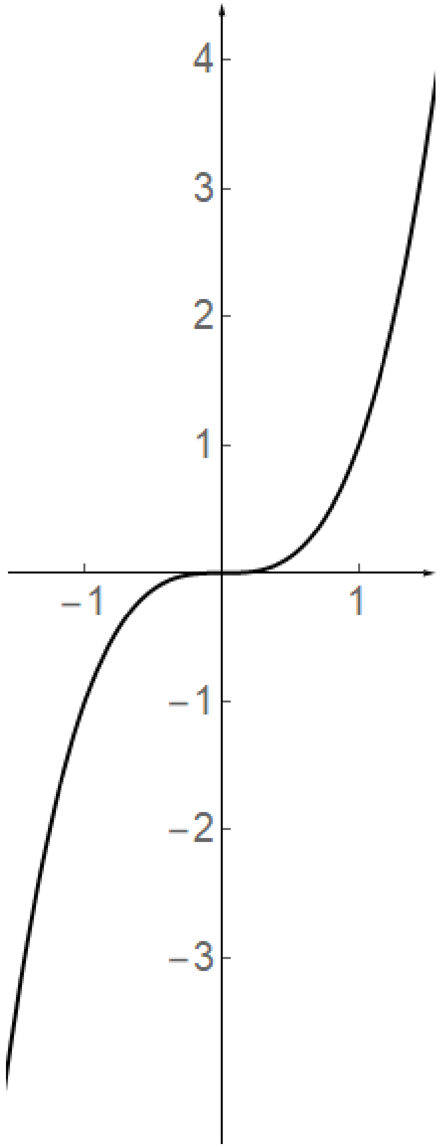
Rastuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$

Kada **raste** varijabla $x \in I$, tada **raste** i vrijednost funkcije $f(x)$ na tom intervalu I.

Strogo rastuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$



Intervali monotonosti

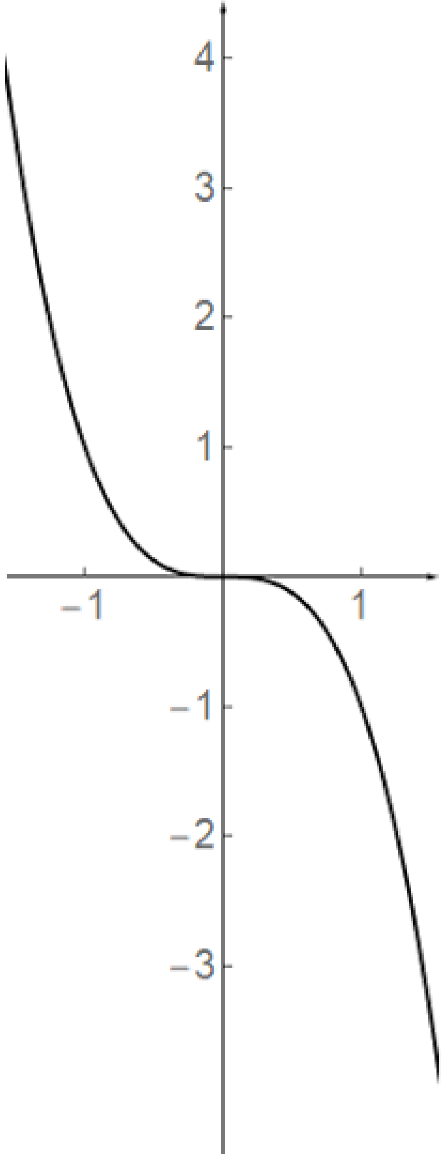
Padajuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; \; f(x_1) \geq f(x_2)$$

Kada **raste** varijabla $x \in I$, tada **pada** vrijednost funkcije $f(x)$ na tom intervalu I.

Strogo padajuća funkcija:

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; \; f(x_1) > f(x_2)$$



Intervali monotonosti

Za funkciju koja (strogo) raste ili (strogo) pada na cijelom intervalu I, kažemo da je **(strogo) monotona** na intervalu I.

Kriterij monotonosti funkcije:

- predznak prve derivacije funkcije, $f'(x)$ se ne mijenja na promatranom intervalu I.

Intervali monotonosti

Na intervalima na kojima je predznak prve derivacije funkcije pozitivan, funkcija je rastuća.

Interval rasta funkcije je rješenje nejednadžbe:

$$f'(x) > 0$$

Na intervalima na kojima je predznak prve derivacije funkcije negativan, funkcija je padajuća.

Interval pada funkcije je rješenje nejednadžbe:

$$f'(x) < 0$$

Ekstremi funkcije

Intervali rasta i pada blisko su vezani uz pojam lokalnog ekstrema funkcije. Lokalni ekstrem može biti **lokalni maksimum** ili **lokalni minimum**.

Lokalni maksimum funkcije f je točka $(x_0, f(x_0))$ takva da za sve vrijednosti $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ iz nekog otvorenog intervala oko vrijednosti x_0 vrijedi

$$f(x_0) \geq f(x)$$

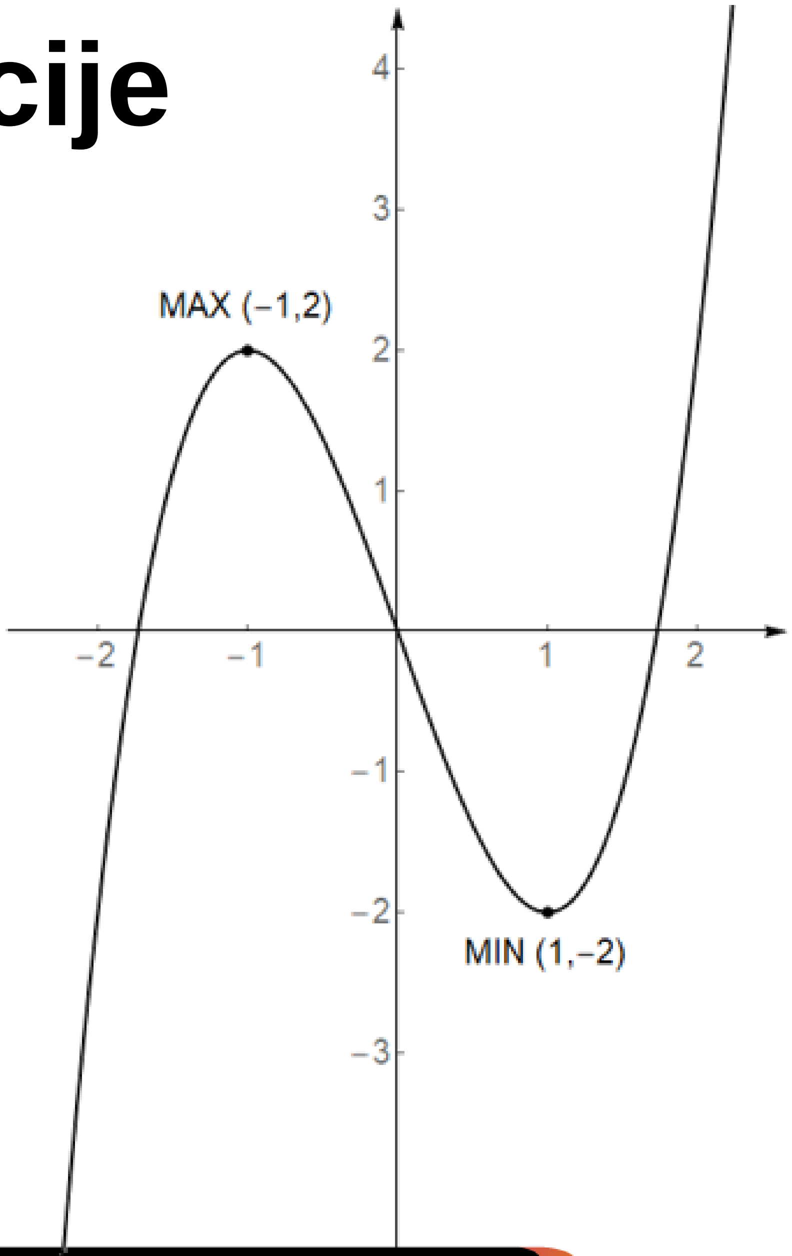
Analogno, za **lokalni minimum** vrijedi

$$f(x_0) \leq f(x)$$

Ekstremi funkcije

Lokalni ekstremi su točke u kojima funkcija postiže svoju najveću ili najmanju vrijednost, ali lokalno.

To ne mora ujedno biti i najveća, odnosno najmanja vrijednost funkcije na cijeloj domeni.



Ekstremi funkcije

Kako bi funkcija u točki x_0 postizala lokalni minimum, funkcija za vrijednosti $x < x_0$ mora imati negativnu derivaciju, $f'(x) < 0$ (tj. mora padati), a za vrijednosti $x > x_0$ mora imati pozitivnu derivaciju, $f'(x) > 0$ (tj. mora rasti).

Odavde slijedi (uz uvjet neprekidnosti derivacije) da **derivacija funkcije u lokalnom minimumu mora imati nultočku**, tj. $f'(x_0) = 0$.

Analogno vrijedi i za lokalni maksimum.

Ekstremi funkcije

Ako funkcija $y = f(x)$ ima maksimum ili minimum u točki x_0 tada je vrijednost prve derivacije u toj točki jednaka nuli.

Taj uvjet je **nužan uvjet** za egzistenciju ekstrema.

Točke koje su rješenja jednadžbe

$$f'(x_0) = 0$$

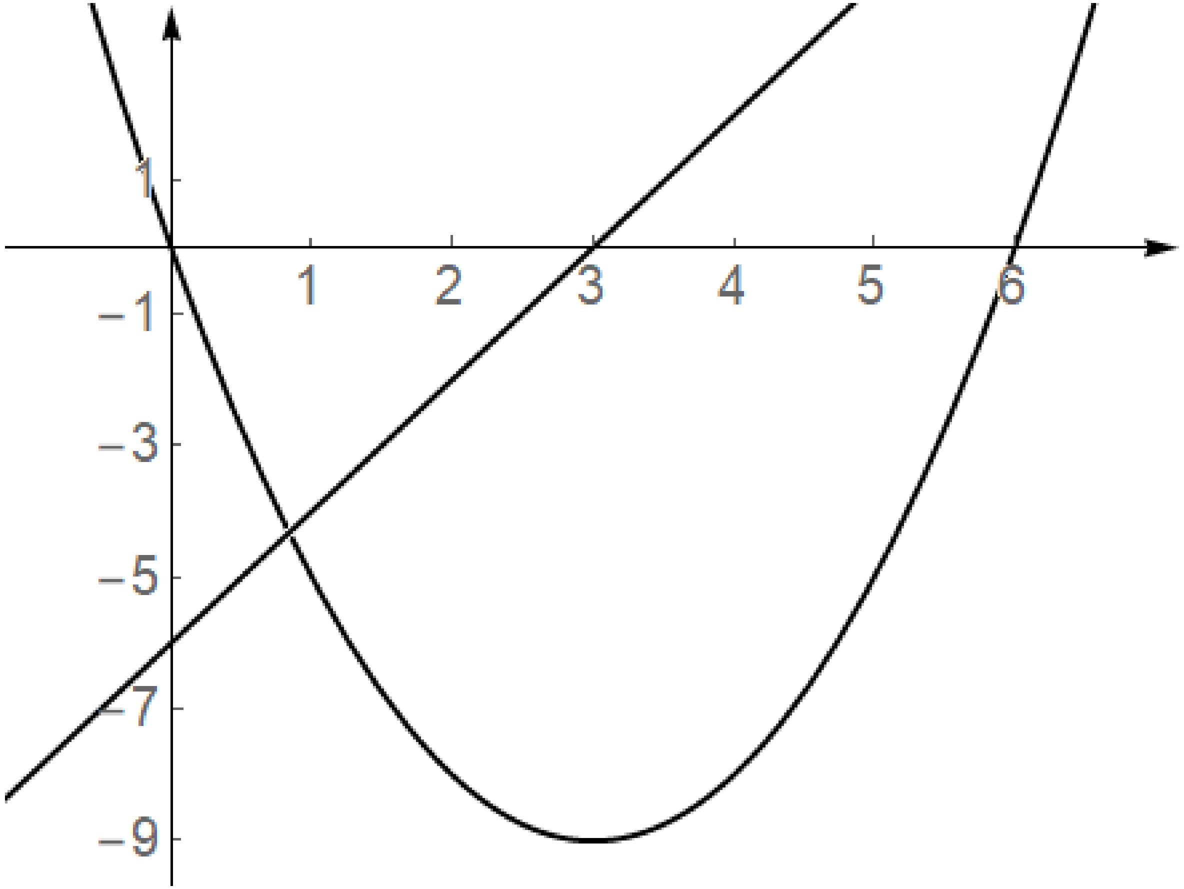
nazivaju se **stacionarnim točkama** funkcije. To su jedine točke u kojima funkcija može imati ekstrem.

Primjer 1. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 2x - 6$$
$$2x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

$$f(3) = -9$$
$$T(3, -9)$$



Je li ta točka minimum ili maksimum funkcije?

ALGEBRA

Minimum funkcije

U slučaju minimuma imamo:

$$\begin{array}{lll} za\ x < x_0: & f(x)\ pada & \Longrightarrow \quad f'(x) < 0 \\ za\ x = x_0: & stacionarna\ točka & \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \\ za\ x > x_0: & f(x)\ raste & \Longrightarrow \quad f'(x) > 0 \end{array}$$

Dakle, **prva derivacija raste prolazeći kroz $\boldsymbol{x_0}$**, što znači da je derivacija te prve derivacije u točki x_0 pozitivna:

$$(f')'(x_0) = f''(x_0) > 0$$

Maksimum funkcije

U slučaju maksimuma imamo:

$$
\begin{array}{lll}
za\ x < x_0: & f(x)\ raste & \Longrightarrow \quad f'(x) > 0 \\
za\ x = x_0: & stacionarna\ točka & \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \\
za\ x > x_0: & f(x)\ pada & \Longrightarrow \quad f'(x) < 0
\end{array}
$$

Dakle, **prva derivacija pada prolazeći kroz $\boldsymbol{x_0}$**, što znači da je derivacija te prve derivacije u točki x_0 negativna:

$$(f')'(x_0) = f''(x_0) < 0$$

Ekstrem funkcije

Ako je **druga derivacija** funkcije u stacionarnoj točki **negativna**, funkcija u toj točki postiže lokalni **maksimum**.

Ako je **druga derivacija** funkcije u stacionarnoj točki **pozitivna**, funkcija u toj točki postiže lokalni **minimum**.

Taj uvjet nazivamo **dovoljnim uvjetom** za egzistenciju ekstrema.

Ekstrem funkcije

Postupak određivanja lokalnih ekstrema:

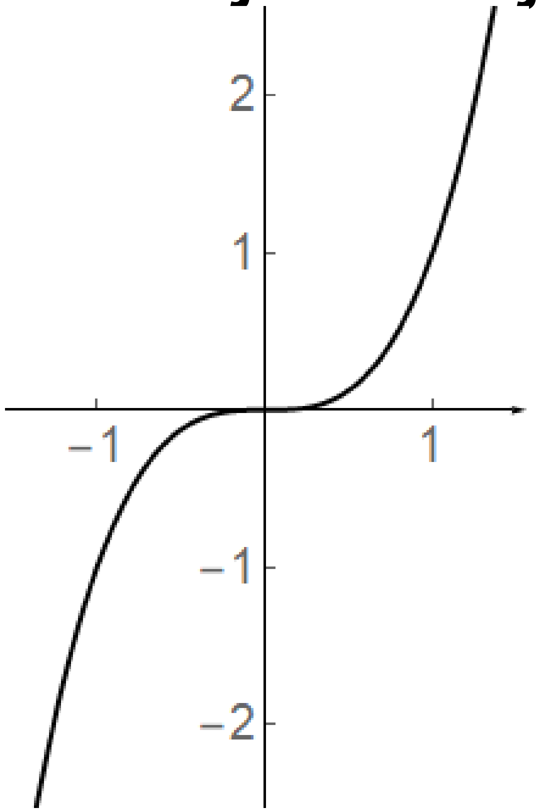
1. **Nužni uvjet**: riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Dobivena rješenja x_1, x_2, ... nazivamo stacionarnim točkama i one su kandidati za točke ekstrema.

2. **Dovoljni uvjet**: stacionarne točke uvrštavamo u $f''(x)$.
   Ako je $f''(x_i) > 0$, tada se u x_1 postiže minimum.
   Ako je $f''(x_i) < 0$, tada se u x_1 postiže maksimum.

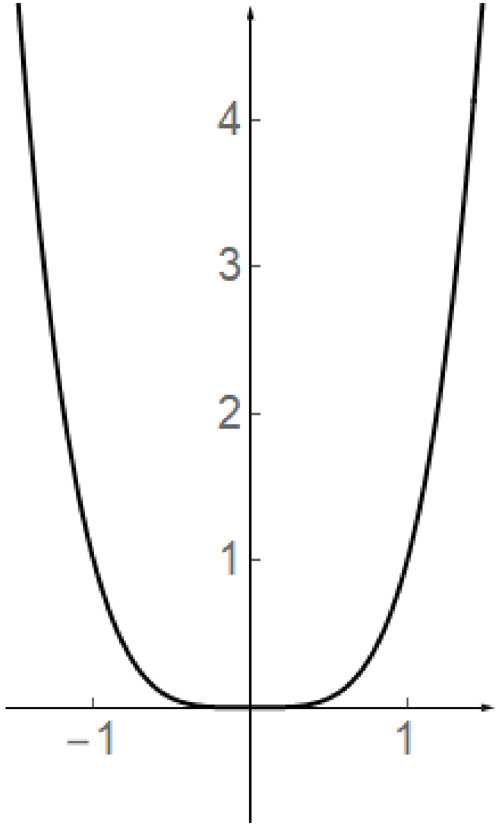
Ekstrem funkcije

No, što se događa ukoliko je druga derivacija u stacionarnoj točki jednaka nuli?

$y = x^3$



$y = x^4$



Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$, tada trebamo tražiti derivacije višeg reda, dok ne nađemo prvu takvu derivaciju koja je u x_0 različita od nule, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Ako je ta derivacija **neparnog reda**, tj. ako je n neparan broj, tada se u x_0 **ne postiže ekstrem**.

Ako je n **paran broj**, tada vrijedi:

$f^{(n)}(x_0) > 0$ - točka minimuma

$f^{(n)}(x_0) < 0$ - točka maksimuma

Primjer 2. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Nužan uvjet:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Stacionarne točke:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1$$

Dovoljan uvjet:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 < 0$$

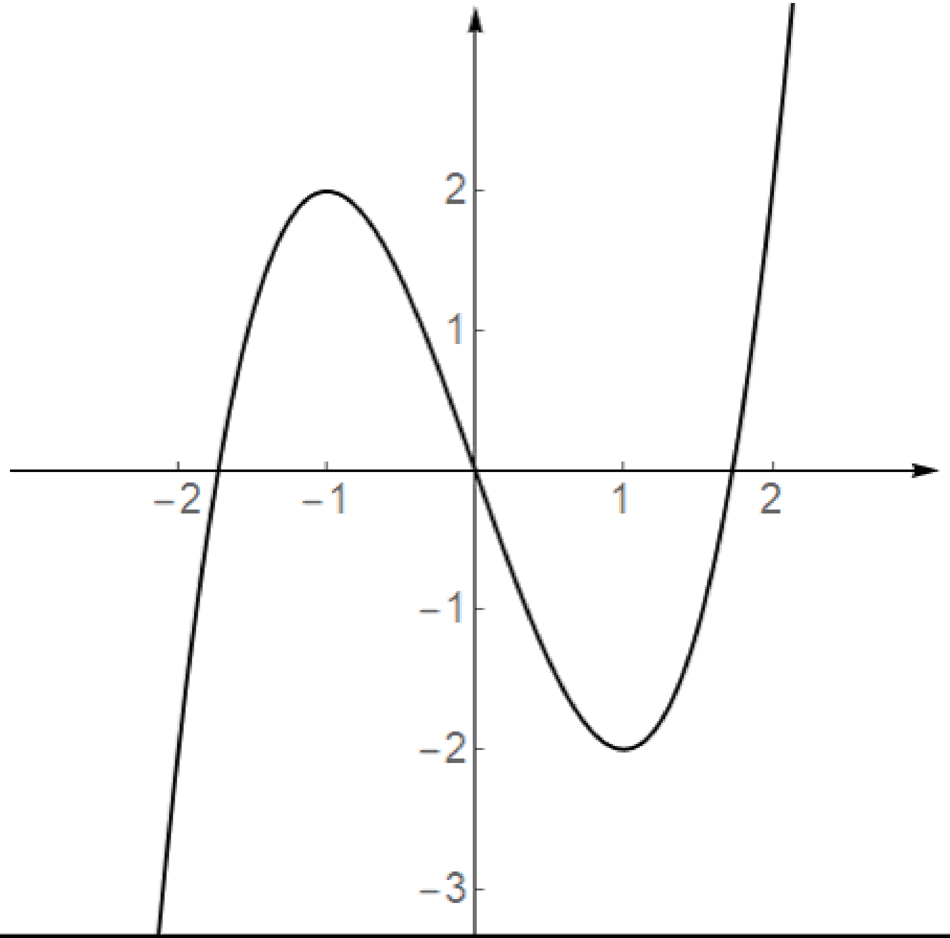
$$\text{MAX}\ (-1,2)$$

$$f''(1) = 6 > 0$$

$$\text{MIN}\ (1,-2)$$

Primjer 2. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x$$



Dovoljan uvjet:

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6 < 0$

MAX $(-1,2)$

$f''(1) = 6 > 0$

MIN $(1,-2)$

Primjer 3. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x \cdot e^x$$

Nužan uvjet:

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x$$

$$e^x \cdot (x+1) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$e^x = 0$$

nema rješenja!

Dovoljan uvjet:

$$f''(x) = e^x(x+1) + e^x$$

$$= e^x \cdot (x+2)$$

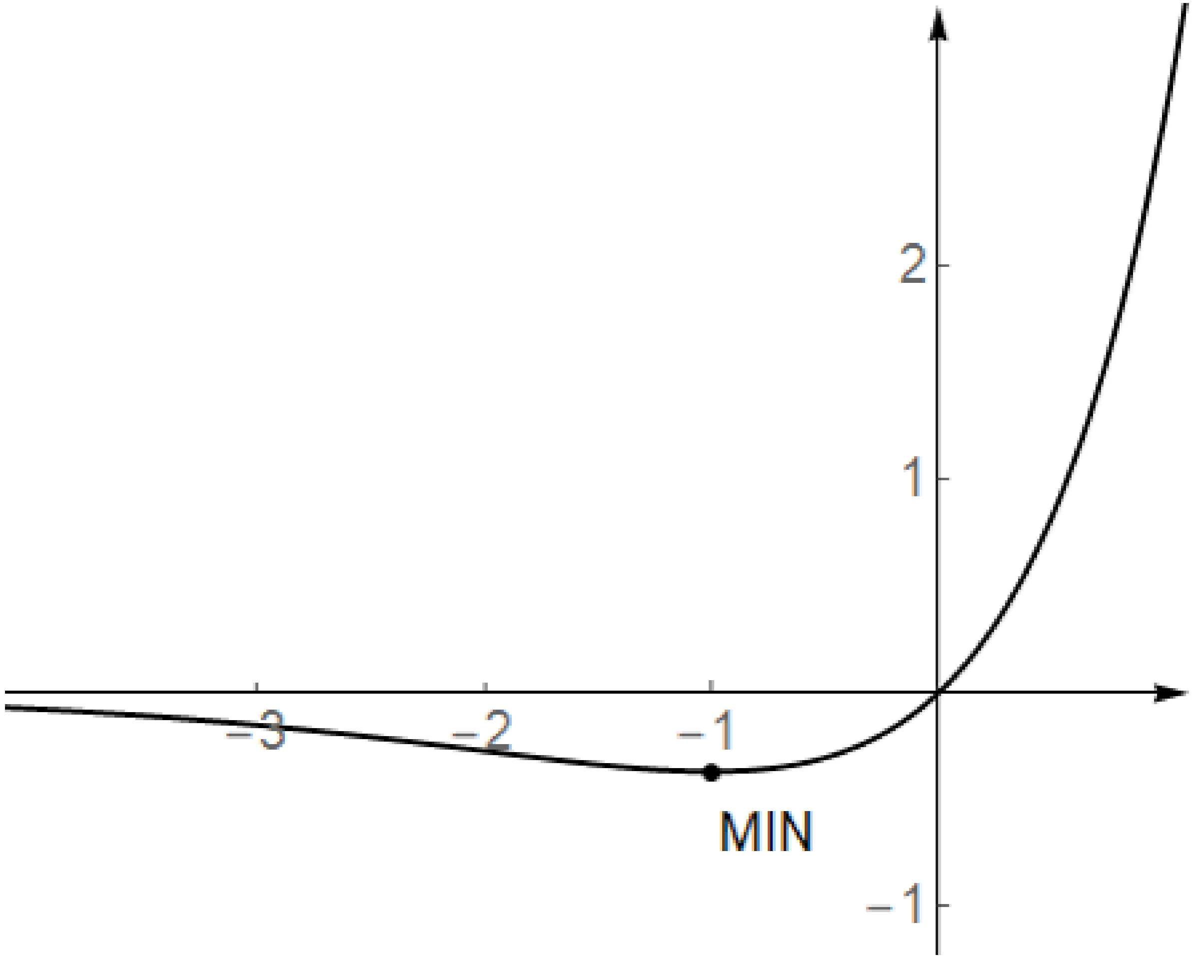
$$f''(-1) = e^{-1} \cdot 1 > 0$$

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$\mathrm{MIN}\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

Primjer 3. Odredite ekstreme funkcije

$$f(x) = x \cdot e^x$$



Dovoljan uvjet:

$$f''(x) = e^x(x+1) + e^x$$
$$= e^x \cdot (x+2)$$

$$f''(-1) = e^{-1} \cdot 1 > 0$$

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$\text{MIN}\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

Primjer 4. Odredite dimenzije limenke Pepsi-Cole tako da trošak materijala bude najmanji, ako je volumen limenke V = 330 ml = 0,33 l.

Rješenje: V = 330 ml = 0,33 l

Oplošje, $O \to min$

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

To je funkcija dvije varijable (r i h). Stoga iz volumena izrazimo jednu varijablu i zamijenimo ju.

$$V = r^2\pi h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{r^2\pi}$$

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} \qquad O = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$$

Dakle, trebamo odrediti minimum funkcije:

$$O = 2r^2\pi + \frac{2V}{r} \qquad O = 2r^2\pi + 2Vr^{-1}$$

Nužni uvjet:

$$O' = 4r\pi - 2Vr^{-2}$$

$$4r\pi - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$4r^3\pi = 2V$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 0.3745\ dm$$

Dovoljan uvjet:

$$O'' = 4\pi + 4Vr^{-3}$$

$$O'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

$$O''(0.3745) > 0$$

minimum!

Preostalo je još samo odrediti visinu limenke s najmanjim oplošjem:

$$h = \frac{V}{r^2\pi}$$

$$h = 0{,}7490\ dm$$

Dakle, limenka s najmanjim oplošjem ima polumjer $r = 0.3745\ dm$ i visinu $h = 0{,}7490\ dm$.

Primjer 5. Odredite područja monotonosti funkcije $g(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Prvo odredimo domenu funkcije:

1. $\ln x \neq 0$
   $x \neq e^0$
   $x \neq 1$

2. $x > 0$

$D(f) = \langle 0,1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

Potom odredimo derivaciju:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Sada odredimo stacionarne točke:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

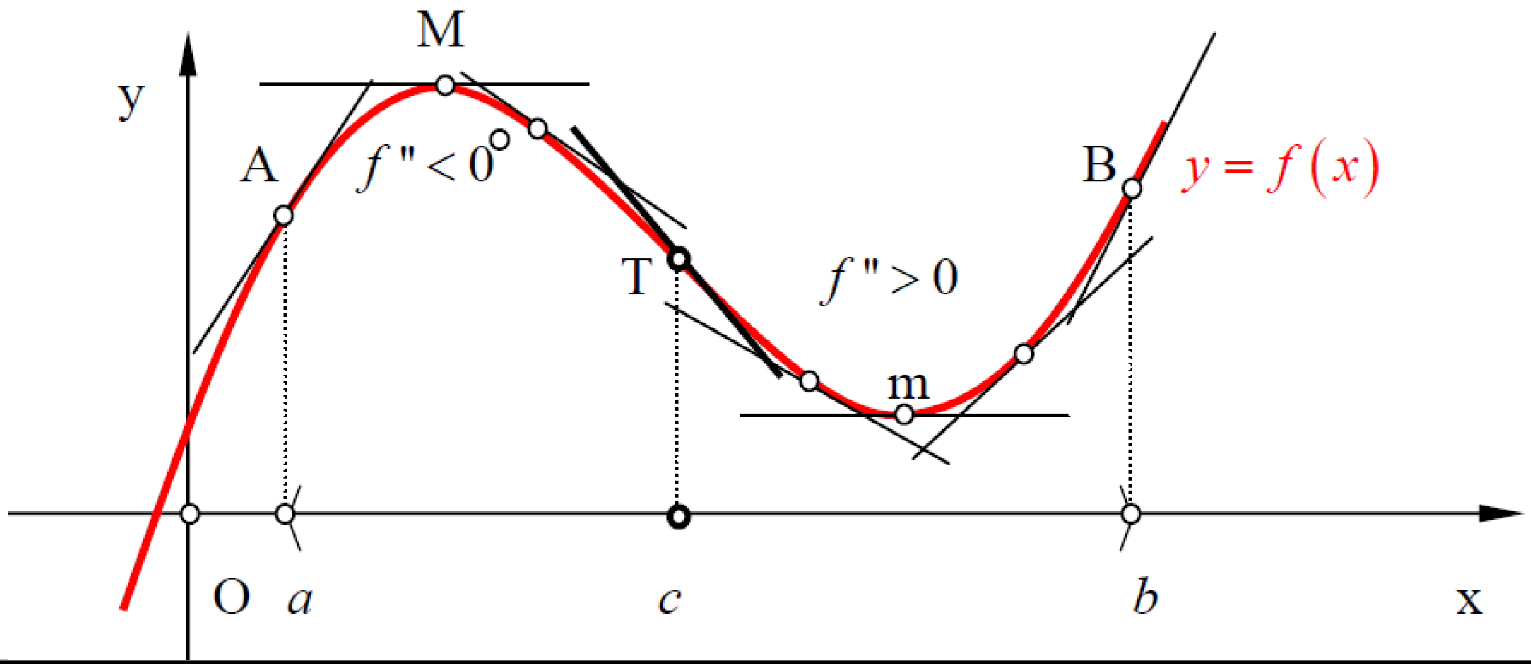
Formiramo tablicu predznaka prve derivacije:

	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	|
$f(x)$	|	$\searrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$	|

Funkcija raste za $x \in \langle e, +\infty \rangle$
Funkcija pada za $x \in \langle 0,1 \rangle \cup \langle 1, e \rangle$
Točka $(e, f(e)) = (e, e)$ je točka minimuma.

Zakrivljenost

Razlikujemo dvije vrste zakrivljenosti krivulje: konveksnost (zakrivljenost na gore) i konkavnost (zakrivljenost na dolje).



Zakrivljenost

Konkavna krivulja:

Ako u bilo kojoj točki luka AT povučemo tangentu, možemo vidjeti da je u okolini dirališta tangente i krivulje **tangenta iznad luka krivulje.**

Konveksna krivulja:

Ako u bilo kojoj točki luka TB povučemo tangentu, možemo vidjeti da je u okolini dirališta tangente i krivulje **tangenta ispod luka krivulje.**

Zakrivljenost

Tangenta povučena u točki T na krivulju $y = f(x)$ prelazi s jedne strane krivulje na drugu, stoga tangenta u točki T siječe krivulju $y = f(x)$.

Točka T je točka na krivulji u kojoj konkavnost funkcije prelazi u konveksnost funkcije.

Takva točka se naziva **točka infleksije** ili **točka pregiba.**

Zakrivljenost

Kriterij za zakrivljenost funkcije:

Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna i barem dva puta derivabilna funkcija na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda je funkcija f **konveksna** na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda je funkcija f **konkavna** na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Zakrivljenost

Kriterij za točku infleksije:

Funkcija f ima točku infleksije ako vrijedi:

1. Nužan uvjet:

$$f''(x) = 0$$

Rješenja te jednadžbe $x_1, x_2, \ldots$
su kandidati za točke infleksije.

2. Dovoljan uvjet:

$$f'''(x_i) \neq 0$$

Primjer 6.
Odredite točke infleksije funkcije $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x$.

Rješenje: Domena funkcije, $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 2 \qquad f''(x) = 6x - 8$$

$$6x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{4}{3}$$

$$f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \neq 0$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}$$

Točka infleksije:
$T\left(\frac{4}{3}, -\frac{200}{27}\right)$.

Primjer 7. Odredite intervale zakrivljenosti funkcije

$$f(x) = \ln^2 x\,.$$

Rješenje: Domena funkcije, $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$.

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 2\ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$\frac{2(1 - \ln x)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

Primjer 7. Odredite intervale zakrivljenosti funkcije

$$f(x) = \ln^2 x\,.$$

Rješenje: Domena funkcije, $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$.

$$f''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2},$$

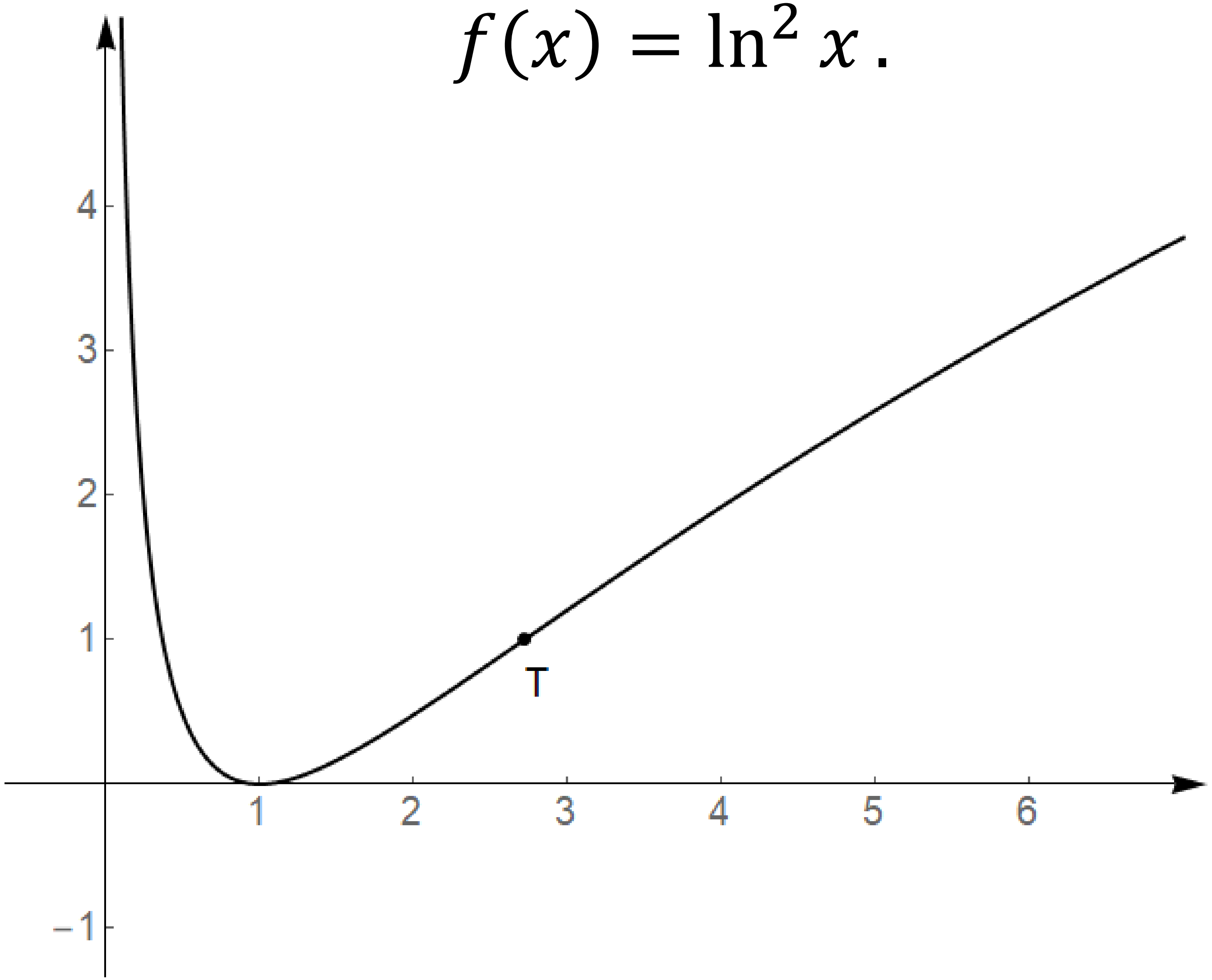
$$x_0 = e$$

	0		e		∞
$f''(x)$	|	$+$	|	$-$	|
$f(x)$	|	$\cup$	|	$\cap$	|

Funkcija je konveksna za $x \in \langle 0, e \rangle$.
Funkcija je konkavna za $x \in \langle e, \infty \rangle$.
Točka infleksije: $T(e, 1)$

Primjer 7. Odredite intervale zakrivljenosti funkcije

$$f(x) = \ln^2 x\,.$$



Primjer 8. Odredite područje konkavnosti i konveksnosti funkcije

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Rješenje: Domena funkcije, $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(e^x(x-1)\right)' \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow$ nema realnih rješenja

Primjer 8. Odredite područje konkavnosti i konveksnosti funkcije

$$f(x)=\frac{e^x}{x}.$$

Rješenje: Domena funkcije, $D(f)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

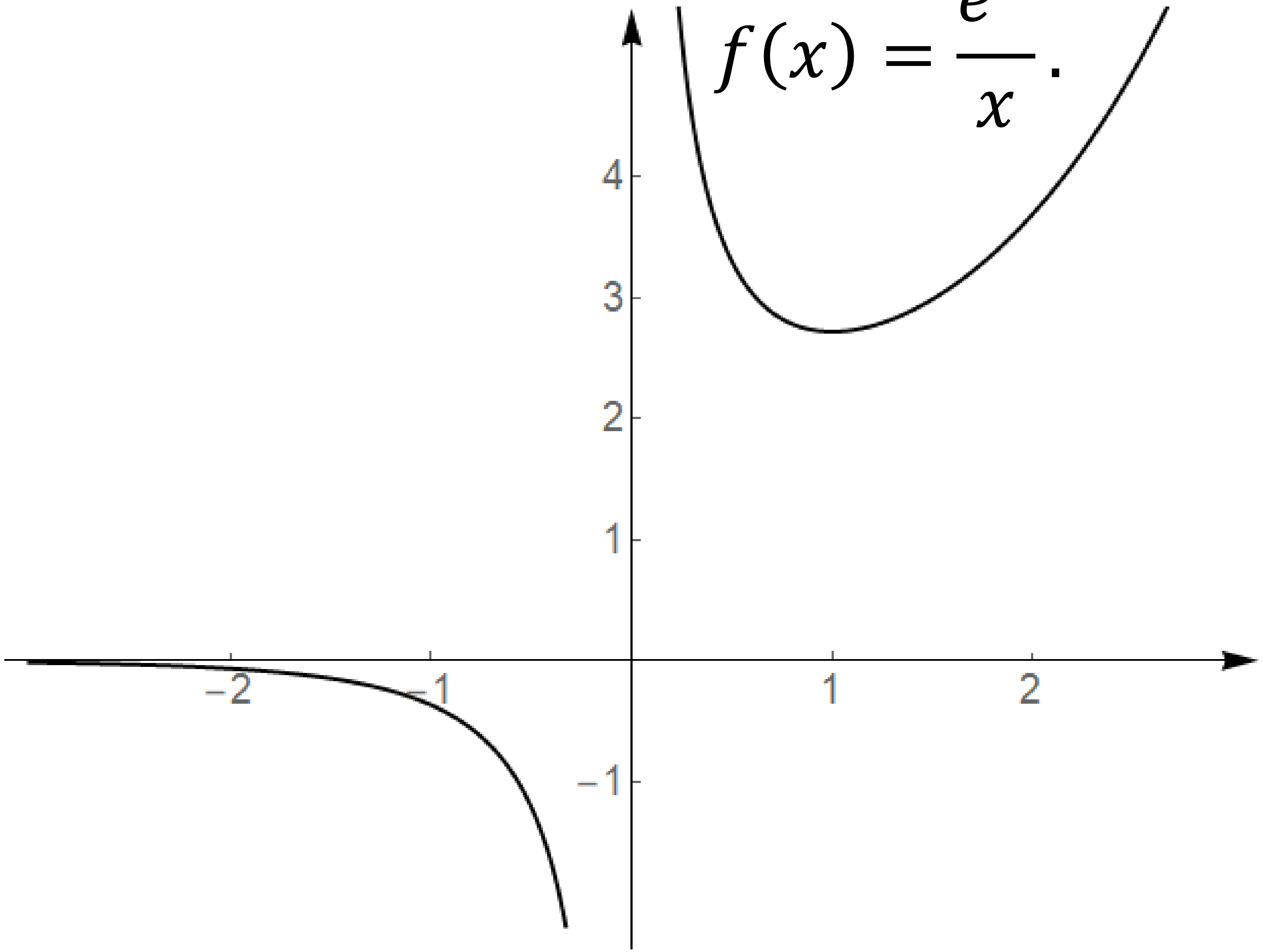
$$f''(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

	$-\infty$		0		∞
$f''(x)$	|	$-$	|	$+$	|
$f(x)$	|	$\cap$	|	$\cup$	|

Funkcija je konveksna za $x\in\langle 0,\infty\rangle$.
Funkcija je konkavna za $x\in\langle -\infty,0\rangle$.
Funkcija **nema točke infleksije**!

Primjer 8. Odredite područje konkavnosti i konveksnosti funkcije

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$



Hvala ☺