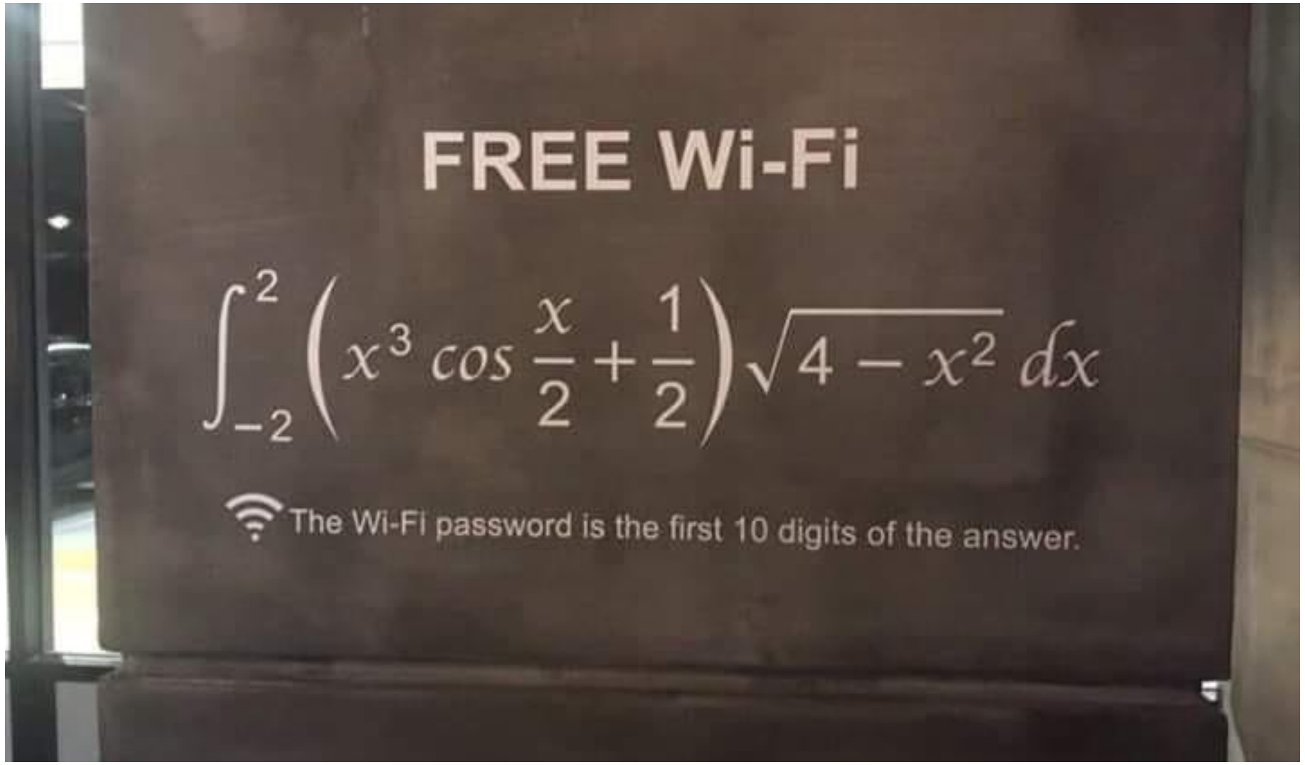
MATEMATIČKA ANALIZA

Određeni integral

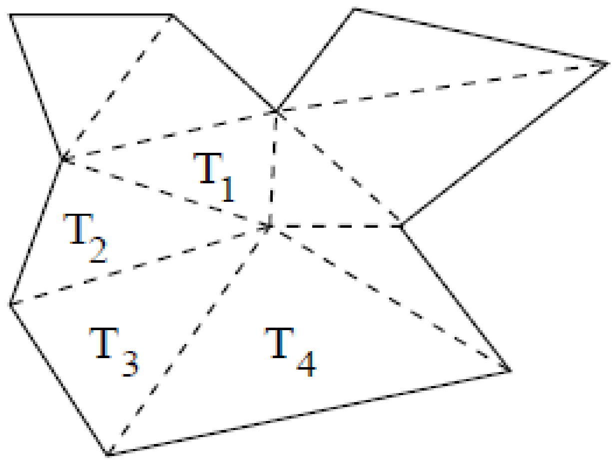
Zašto nam trebaju određeni integrali?

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics:



Problem površine

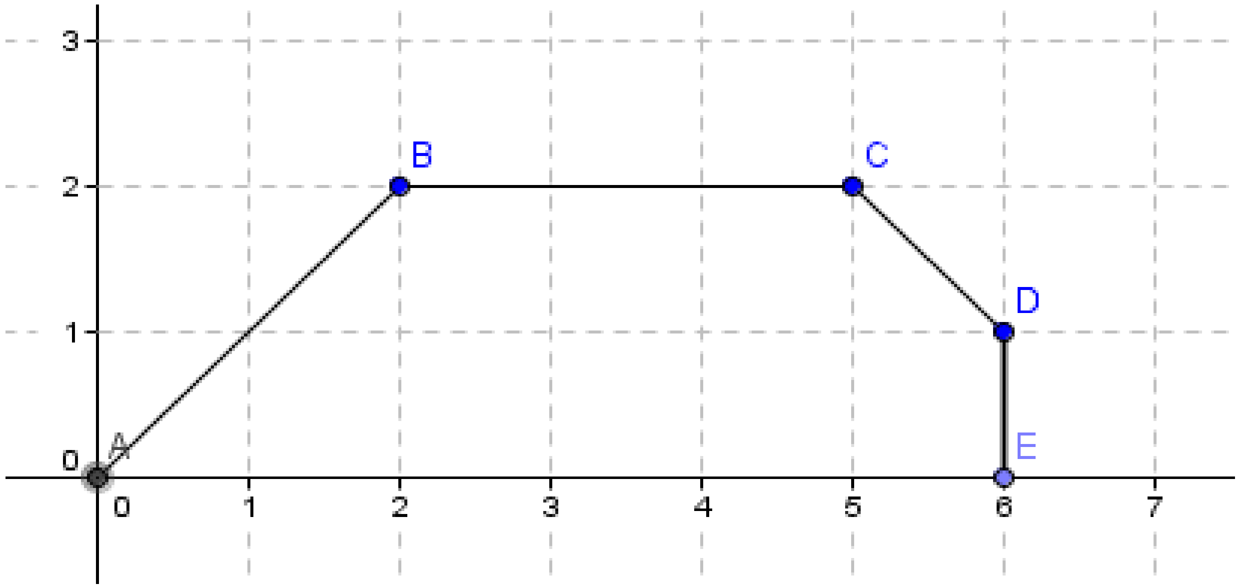
Lako je izračunati površinu geometrijskog lika ako je taj lik omeđen „ravnim” komadima granice tj. dužinama.



$$P = \sum_i P(T_i)$$

Problem površine

Primjer 1. Izračunajte površinu omeđenu zadanim dužinama i osi x.



P_1=2

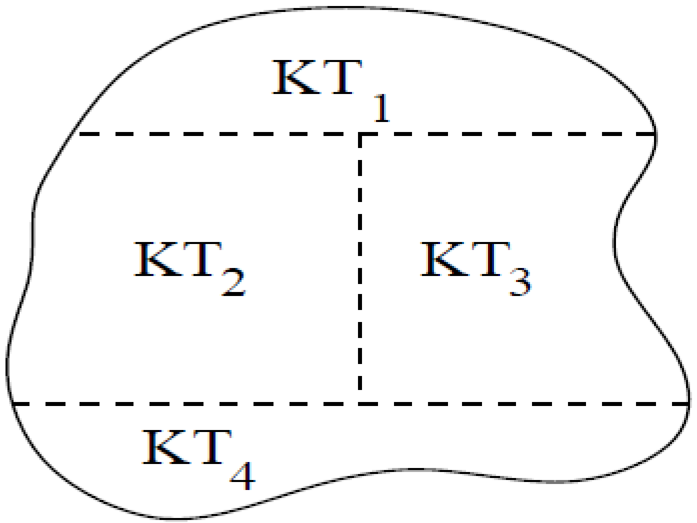
P_2=6

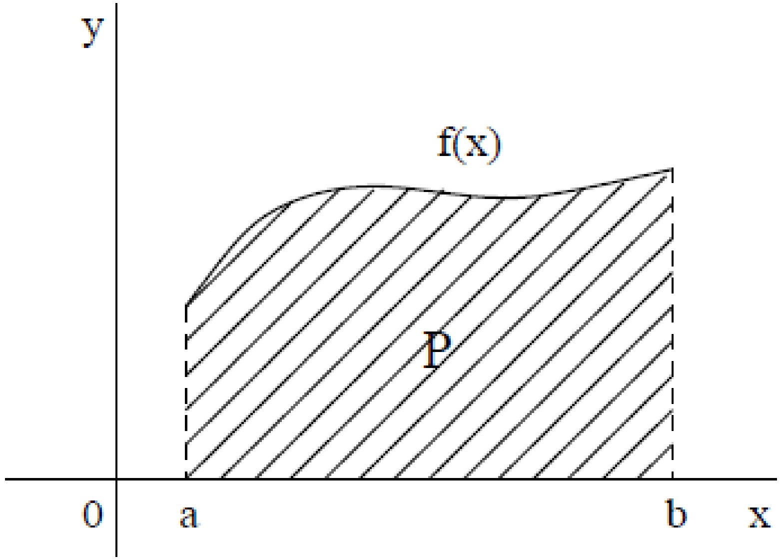
P_3=1,5

P_{uk}=9,5

Krivuljni trapez

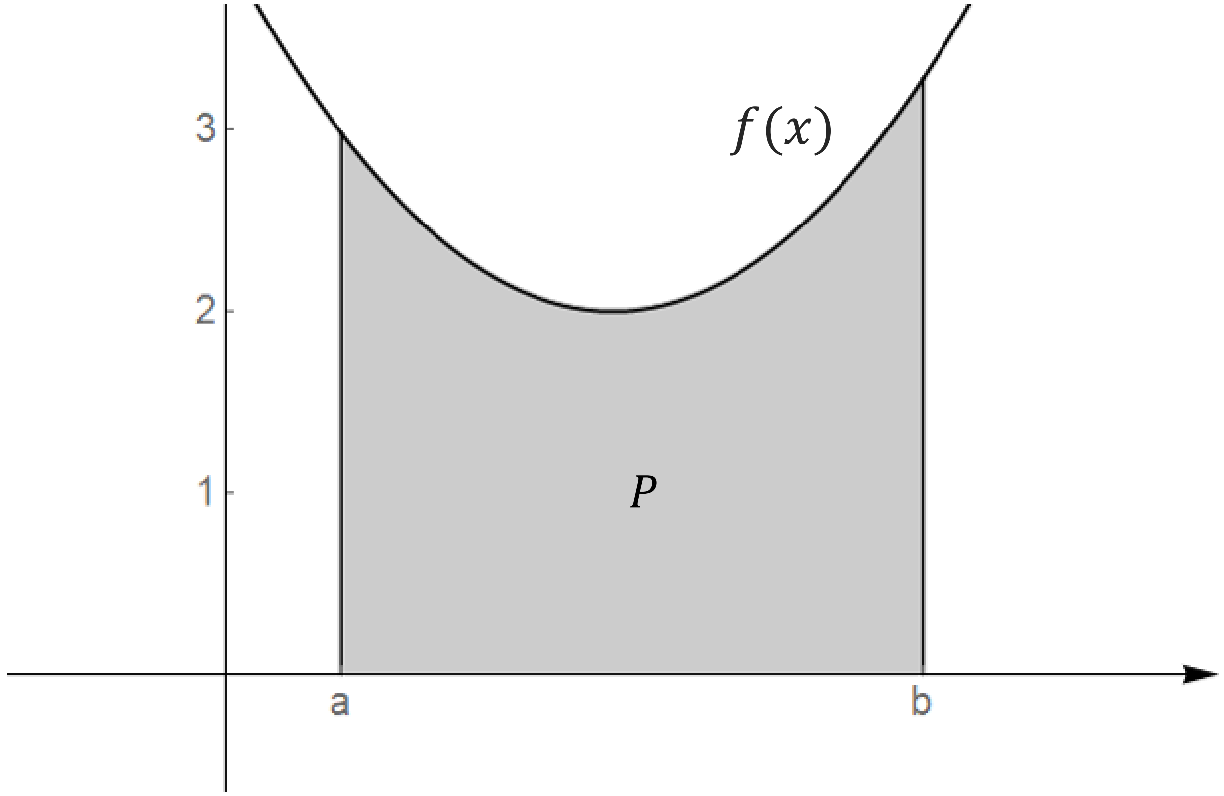
Što ako neki dijelovi granice ravninskog lika nisu ravni?





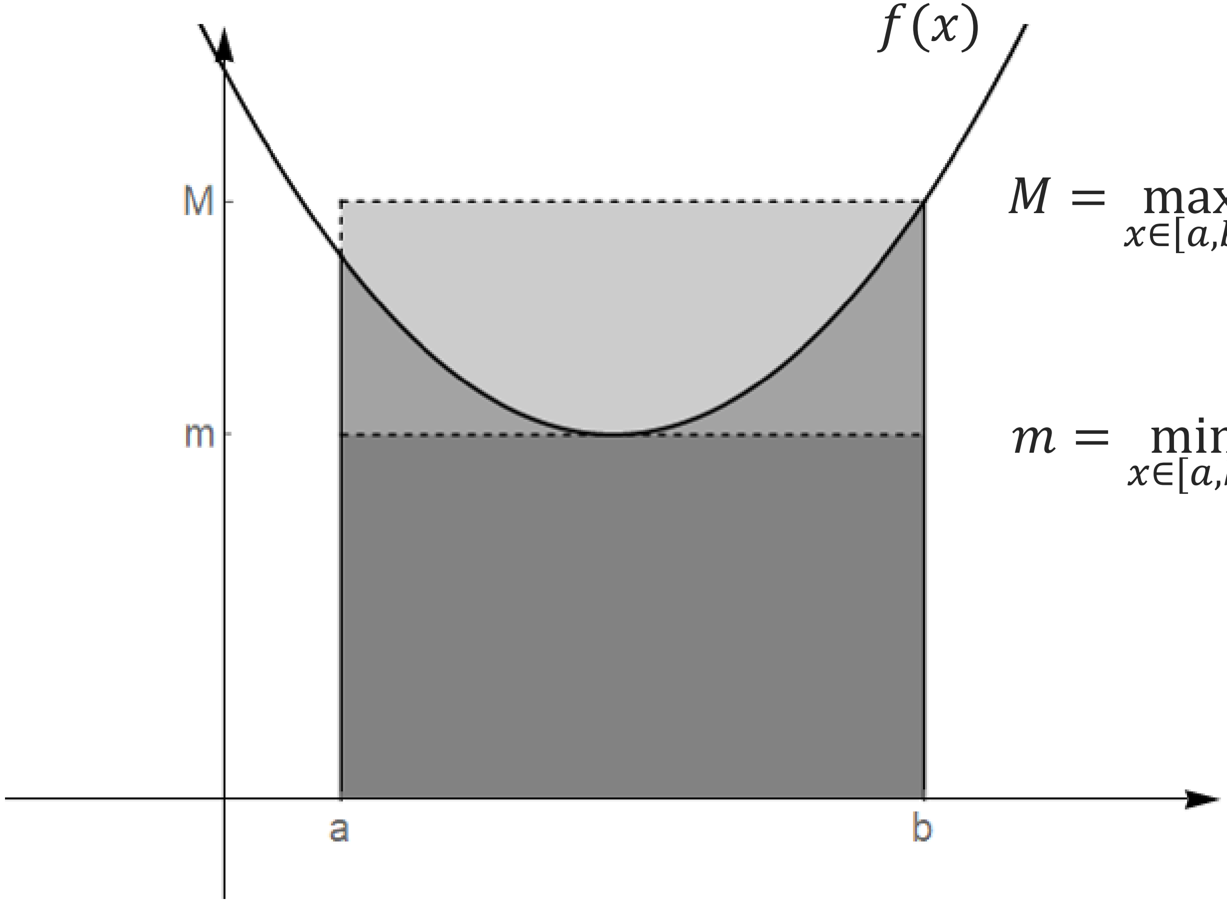
Krivuljni trapez

Krivuljni trapez omeđen odozdo x-osi, s lijeva pravcem $x = a$, s desna pravcem $x = b$ i odozgo grafom funkcije $f(x)$.



Krivuljni trapez

Za površinu između grafa funkcije i x-osi vrijedi:



$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

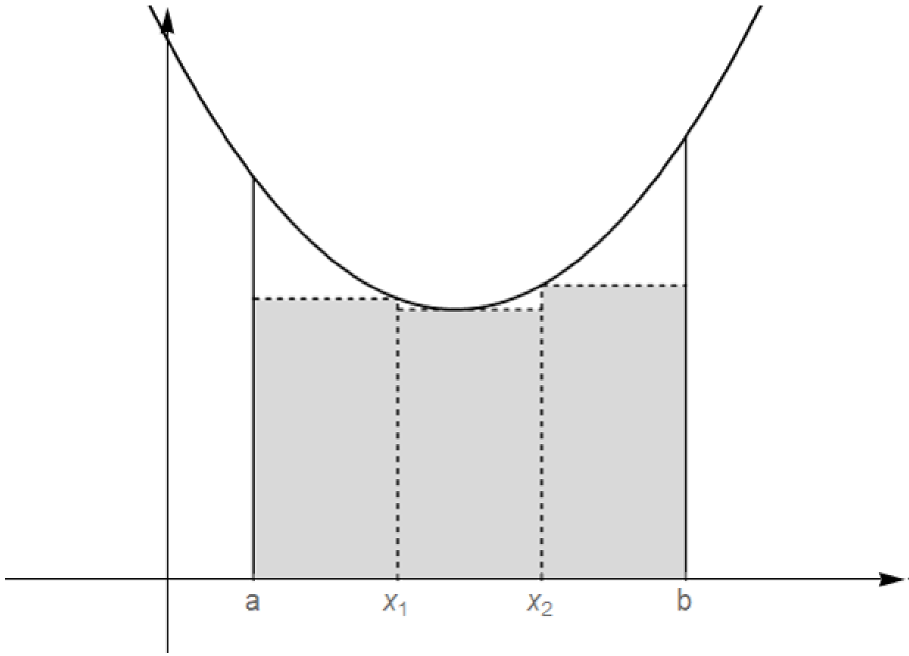
$$\boxed{(b-a) \cdot m \le P \le (b-a) \cdot M}$$

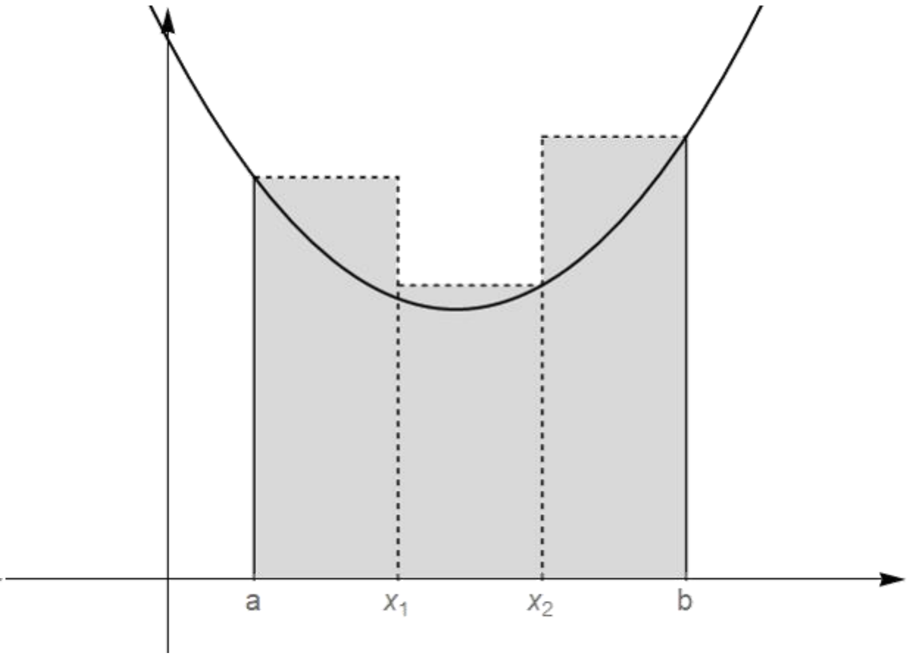
Darbouxova suma

Početna aproksimacija funkcije površinom pravokutnika čija je visina najmanja vrijednost funkcije na intervalu $[a, b]$, $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ ili najveća vrijednost funkcije na intervalu $[a, b]$, $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ je prilično neprecizna.

Umjesto toga, interval $[a, b]$ možemo podijeliti na više manjih intervala, i na svakom od njih napraviti aproksimaciju površine.

Darbouxova suma

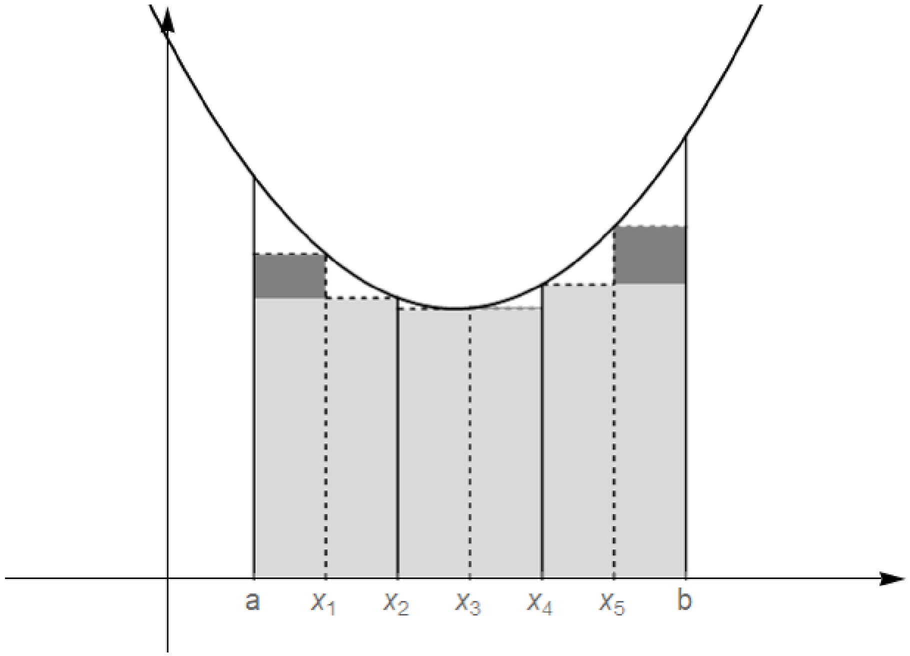


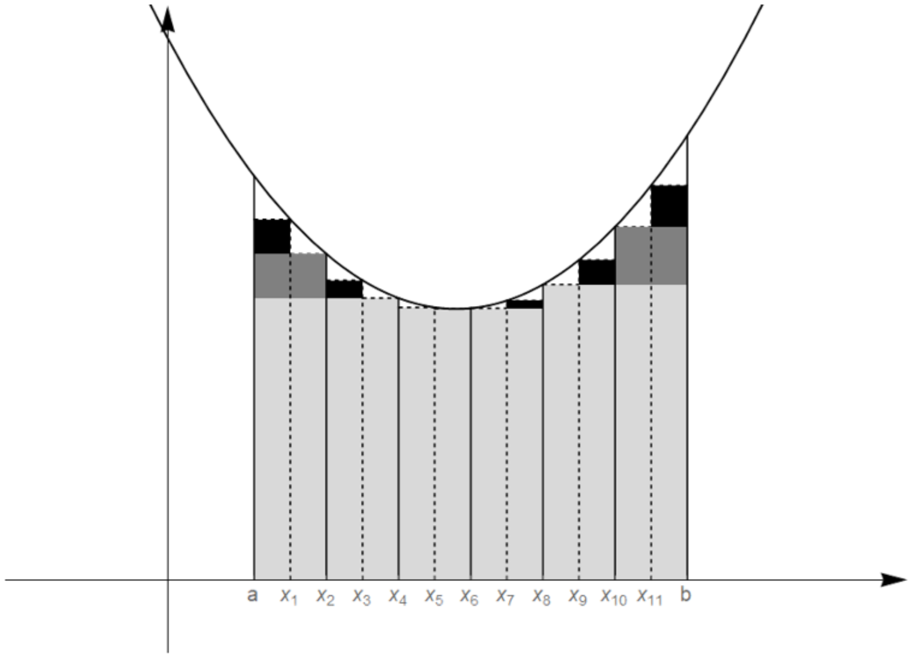


Vidimo kako su aproksimacije sada bolje.

Što se događa ako povećamo broj podintervala?

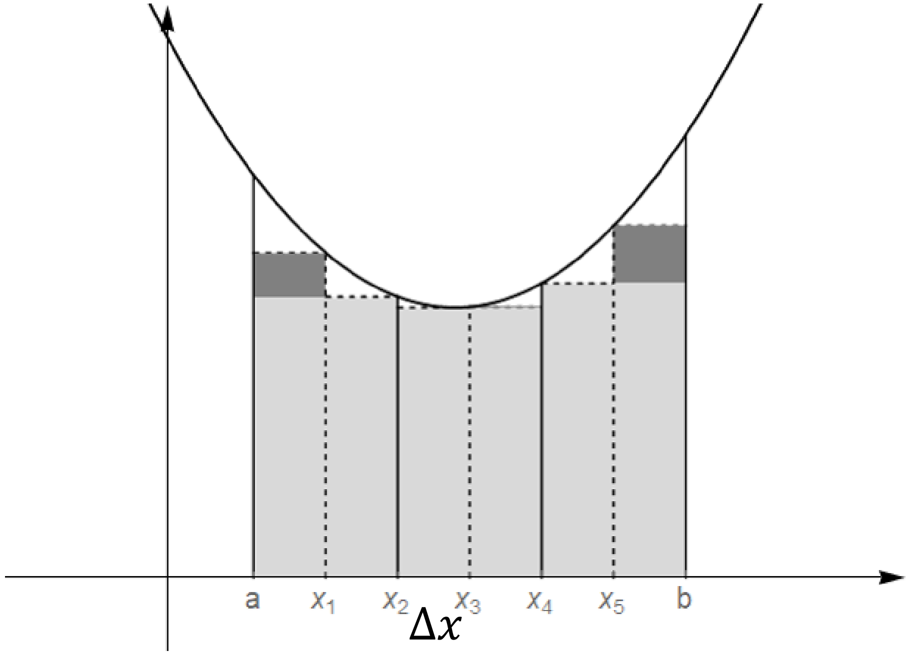
Darbouxova suma





Kako je razdioba intervala $[a, b]$ gušća, to je aproksimacija bliža stvarnoj vrijednosti površine.
Isto se može pokazati i za maksimum funkcije.

Darbouxova suma



Svakoj podjeli (razdiobi) intervala $[a, b]$ možemo pridružiti slijedeće sume:

$$s(r) = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \, m_i$$

donja Darbuoxova suma

$$S(r) = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \, M_i$$

gornja Darbuoxova suma

Određeni integral

Vidjeli smo kako se *profinjenjem* razdiobe vrijednost i gornje i donje Darbouxove sume približava stvarnoj površini između grafa funkcije $f(x)$ i x-osi nad intervalom $[a, b]$.

Osim toga, za sve vrijednosti funkcije $f(x)$ na svakom pojedinom podintervalu vrijedi:

$m_i \leq f(x_i) \leq M_i$ za neki x_i iz tog podintervala

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i$$

Određeni integral

Prelaskom na limes kada $\Delta x_i \to 0$, odnosno prelaskom na razdiobu s beskonačno mnogo podintervala, slijedi:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i \leq \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \Delta x_i$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \Delta x_i \leq \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i$$

Određeni integral

Za lijevu i desnu granicu ove nejednadžbe, odnosno za donju i gornju Darbouxovu sumu, vidjeli smo kako teži površini ispod grafa $f(x)$.

$$P \;\le\; \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\Delta x_i \;\le\; P$$

$$P \;=\; \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\Delta x_i$$

Određeni integral

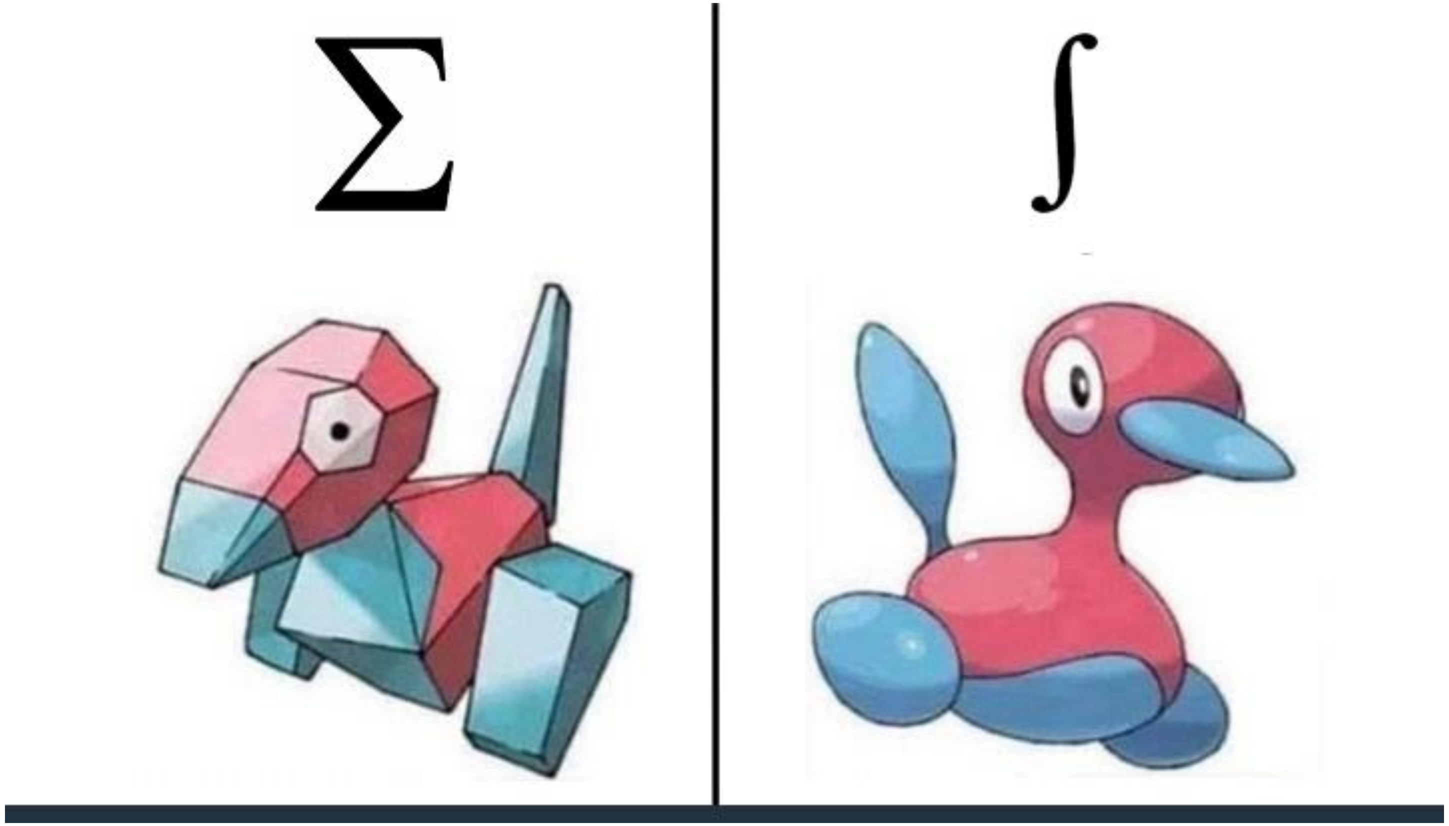
$$P = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\Delta x_i$$

Dobiveni izraz nazivamo određenim (Riemannovim) integralom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ i pišemo:

$$P = \int_a^b f(x)\, dx$$

https://www.youtube.com/watch?v=Stbc1E5t5E4 (do 4:40)

Određeni integral



Newton-Leibnizov teorem

Opisana definicija definira određeni integral kao površinu ispod grafa funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$.

No limese pripadnih Darbouxovih suma nije lako računati.

Stoga je ključni rezultat **Newton- Leibnizov teorem**, koji se još i naziva **Fundamentalni teorem integralnog računa**.

Newton-Leibnizov teorem

Neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, tj. neka vrijedi:

$$F'(x) = f(x)$$

Tada za određeni integral vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Newton-Leibnizov teorem

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Iskaz teorema je jednostavan, no njegovo značenje je veliko.

Njime se povezuju dva bitno različita pojma: **površina ispod krivulje** (određeni integral) i **antiderivacija** (neodređeni integral).

Upravo zato oba pojma nazivamo zajedničkim imenom – **integralima**.

Newton-Leibnizov teorem

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Newton-Leibnitzov teorem nam omogućava i jednostavan način računanja određenih integrala:

- funkciji odredimo primitivnu funkciju (tj. riješimo neodređeni integral)
- u primitivnu funkciju uvrstimo granice određenog integrala i oduzmemo dobivene vrijednosti

Newton-Leibnizov teorem

Primjer 1. Odredite vrijednost integrala:

$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx$$

Rješenje:

$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Kod rješavanja određenog integrala više ne koristimo konstantu integracije c!


REMEMBERS TO ADD +C ON INTEGRAL
WAS A DEFINITE INTEGRAL
quickmeme.com

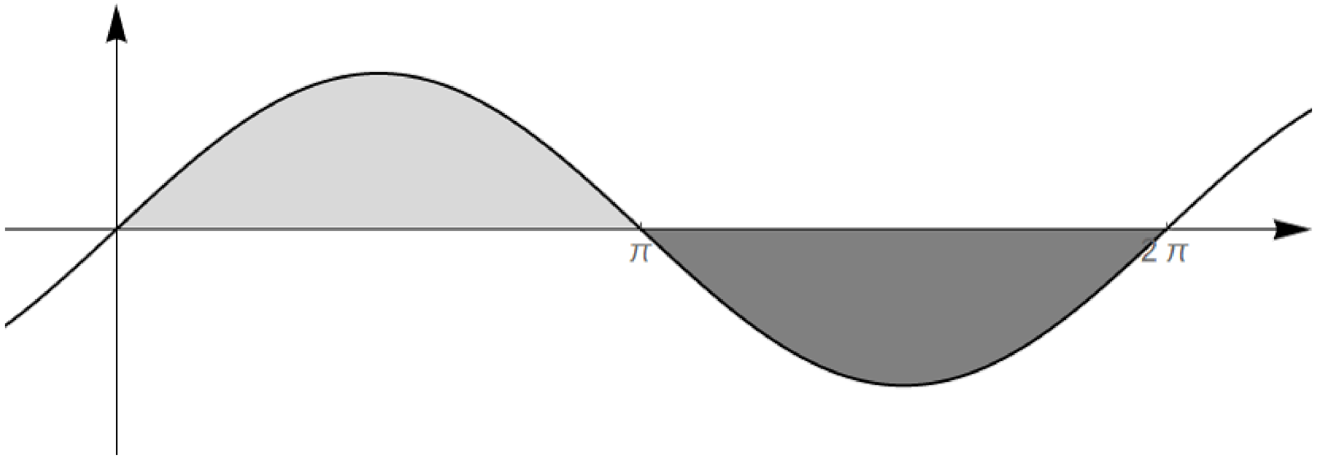
Svojstva određenih integrala

Određeni integral negativne funkcije kao rezultat daje negativnu vrijednost!

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0)$$

$$= -1 - (-1)$$

$$= 0$$



Svojstva određenih integrala

Svojstvo 1.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Ovaj integral predstavlja „površinu” nad intervalom $[a, a]$, odnosno „površinu” linije.

Svojstvo slijedi iz činjenice da linija nema površinu.

$$\int_a^a f(x)dx = \ F(a) - F(a) = 0$$

Svojstva određenih integrala

Svojstvo 2.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Zamjena granica integracije mijenja predznak integrala.

$$\int_e^1 \frac{1}{x}dx = \ln|x| \Big|_e^1 = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1$$

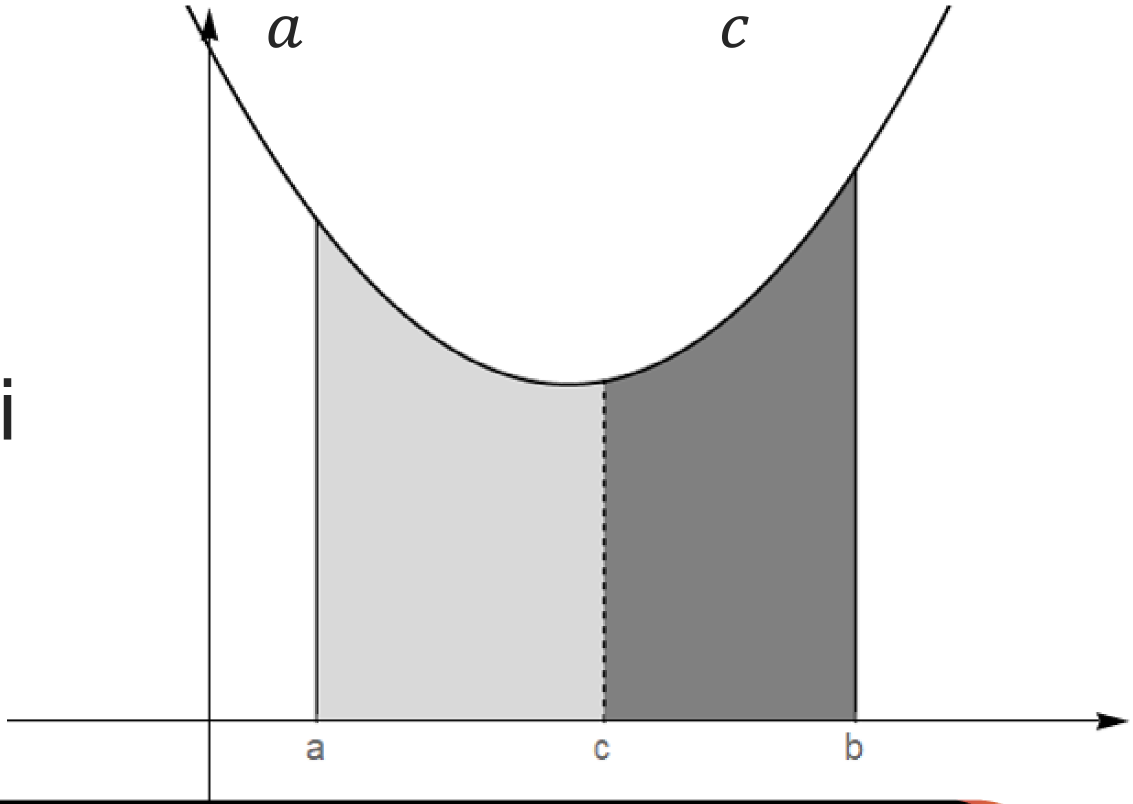
$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln|x| \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Svojstva određenih integrala

Svojstvo 3.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Područje integracije možemo aditivno rastaviti na manje dijelove.



Svojstva određenih integrala

Svojstvo 4. Ako je $f(x)$ neparna funkcija tada je

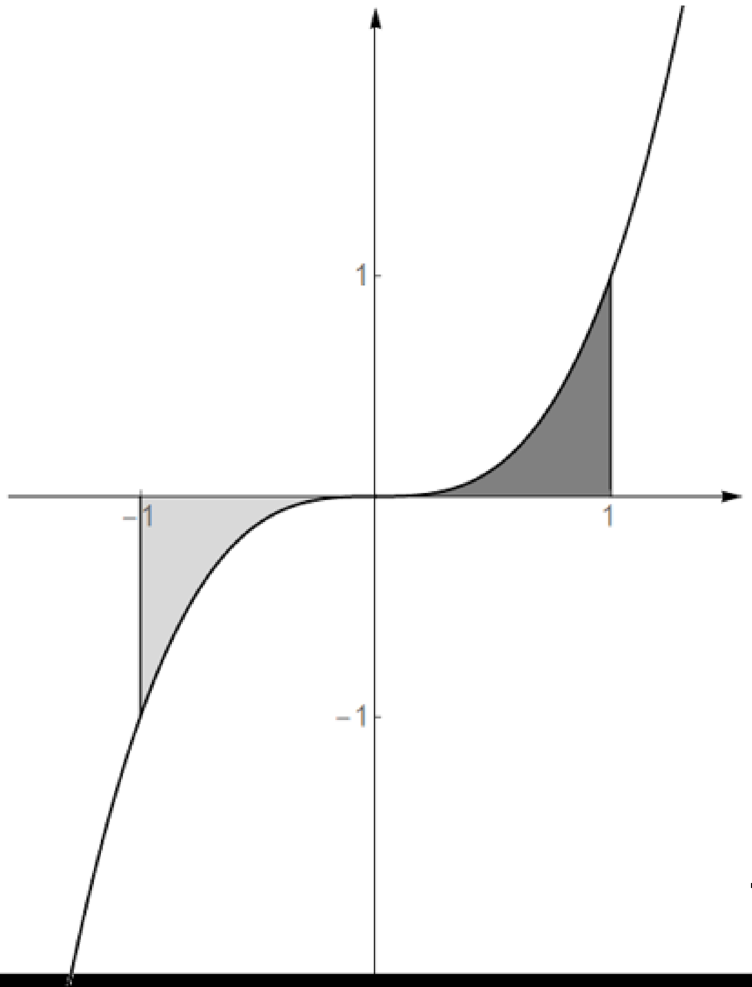
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Neparna funkcija:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = \sin x$$

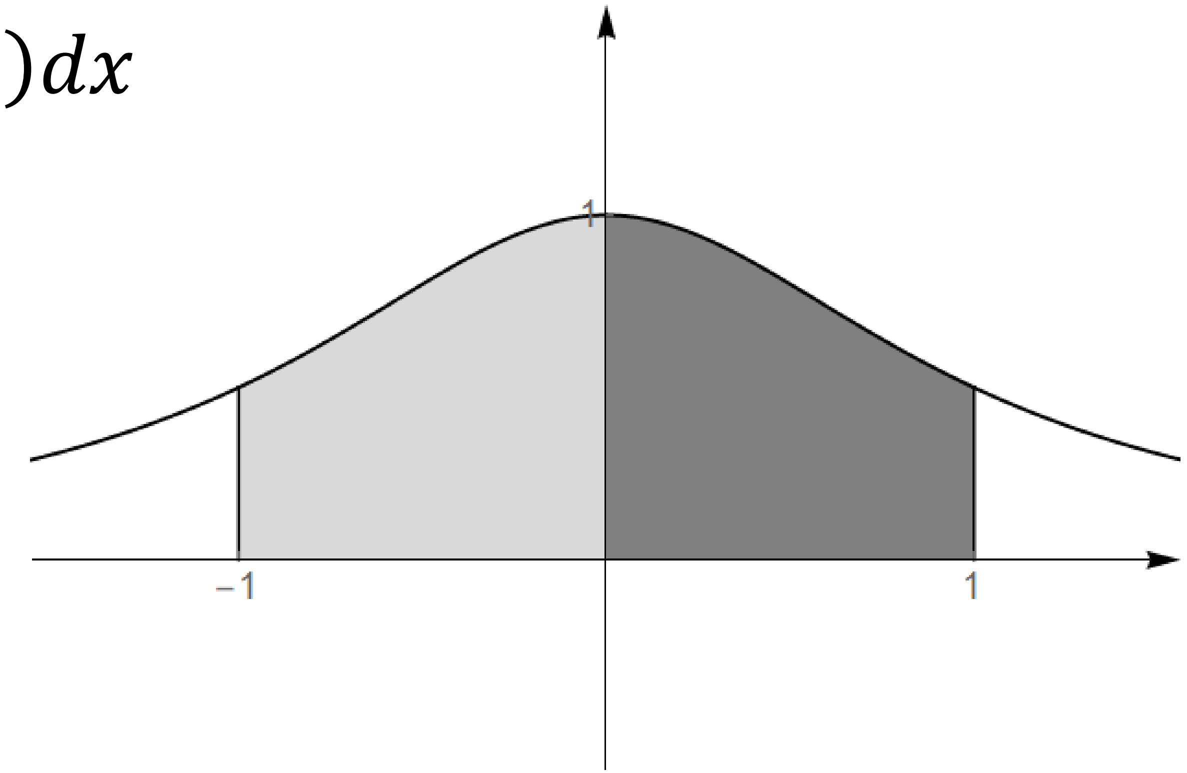


$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

Svojstva određenih integrala

Svojstvo 5. Ako je $f(x)$ parna funkcija tada je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



Parna funkcija:

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(x) = x^{2n}$$

$$f(x) = \cos x$$

Svojstva određenih integrala

Zadatak 1. Koristeći svojstva određenog integrala riješite sljedeći integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x + \operatorname{tg} x)\, dx = 0$$

Funkcija $f(x) = x + \operatorname{tg} x$ je neparna:

$$f(-x) = -x + \operatorname{tg}(-x) = -x + \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$$

$$= -x + \frac{-\sin x}{\cos x} = -(x + \operatorname{tg} x) = -f(x)$$

Svojstva određenih integrala

Zadatak 2. Ako je $\int_0^{\pi} \sin^2 x \ dx = \frac{\pi}{2}$, odredite:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx \ = 2\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx \ = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Funkcija $f(x) = \sin^2 x$ je parna:

$$f(-x) = \sin^2(-x) \ = (\sin(-x))^2$$

$$= (-\sin x)^2 \ = \sin^2 x \ = f(x)$$

Svojstva određenih integrala

Zadatak 3. Neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Odredite $F(1)$ ako je $F(2) = 3$ i $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$4 = 2 + F(2) - F(1)$$

$$4 = 2 + 3 - F(1) \quad \Rightarrow \quad F(1) = 1$$

Video materijali (Toni Milun):

https://www.youtube.com/watch?v=CGKbl27kBh8&list=PLXygsnSpBk5QblX-ltSyU3EPrOvrMBVWf

Domaća zadaća

1) Površina ispod grafa funkcije $f(x)$ nad intervalom $[0,3]$ dvostruko je veća od površine ispod grafa iste funkcije nad intervalom $[0,1]$. Odredite $\int_1^3 f(x)dx$ ako je $F(x) = F(0)$, gdje je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$.

2) Za koje funkcije vrijedi sljedeća tvrdnja: Ako za funkciju $f(x)$ i $a > 0$ vrijedi $\int_0^a f(x)dx = b$ tada je $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Navedite barem dva primjera takvih funkcija.

Hvala ☺