

# MATEMATIKA

## Vježbe

1. ishod



# Polinomi

Neka su  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  realni brojevi, te  $n \in \mathbb{N}_0$ . Tada se

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

naziva polinomom **n-tog stupnja**.

- brojeve  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  nazivamo **koeficijentima polinoma**
- svaki dio polinoma koji se zbraja se naziva **monom**. Svaki monom u polinomu ima svoj stupanj
- **stupanj polinoma** jednak je najvećem stupnju svog monoma

# Polinomi

## Dijeljenje polinoma

- polinom  $p(x)$  se može podijeliti polinomom  $q(x)$  samo ako mu je stupanj veći ili jednak stupnju polinoma  $q(x)$ .
- prilikom dijeljenja nastaju još dva polinoma – rezultat dijeljenja  $r(x)$  i ostatak  $o(x)$ . Pri tome uvijek vrijedi:

$$p(x) = q(x) \cdot r(x) + o(x)$$

- Rezultat dijeljenja polinoma  $p(x)$  polinomom  $q(x)$  tada zapisujemo:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{o(x)}{q(x)}$$

Ako je stupanj polinoma  $n = 0$ , onda polinom **nultog stupnja** zapisujemo u obliku:

$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- nazivamo ga **konstantnim polinomom** ili **konstanta**
- njegov graf je pravac  $y = c$  koji je paralelan sa x-osi

Ako je stupanj polinoma  $n = 1$  onda polinom **prvog stupnja** zapisujemo u obliku:

$$f(x) = kx + l, \quad k \neq 0$$

- nazivamo ga **linearnom funkcijom**
- Vodeći koeficijent ( $k$ ) se zove **koeficijent smjera**, a slobodni ( $l$ ) **odsječak na y-osi**
- Linearna funkcija ima jednu nultočku:  $-\frac{l}{k}$

Ako je stupanj polinoma  $n = 2$ , onda polinom **drugog stupnja** zapisujemo u obliku:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

- zovemo ga **kvadratna funkcija**
- **diskriminanta** kvadratne funkcije:  $D = b^2 - 4ac$
- **nultočke** kvadratne funkcije:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- ako je:
  - $D > 0$  kvadratna funkcija ima dvije različite realne nultočke
  - $D = 0$  kvadratna funkcija ima jednu realnu nultočku
  - $D < 0$  kvadratna funkcija ima kompleksno konjugirane nultočke

- drugi zapis kvadratne jednadžbe

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

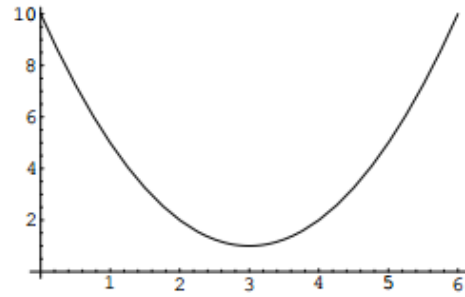
-  $x_1$  i  $x_2$  su dvije realne nultočke

- graf kvadratne funkcije naziva se **parabola**

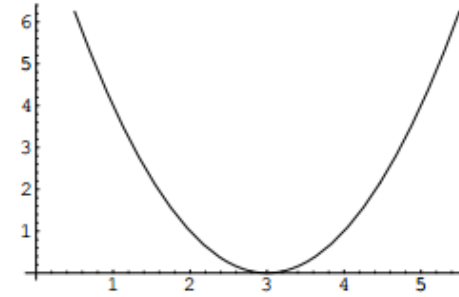
- Koordinate tjemena

$$T(x_0, y_0) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

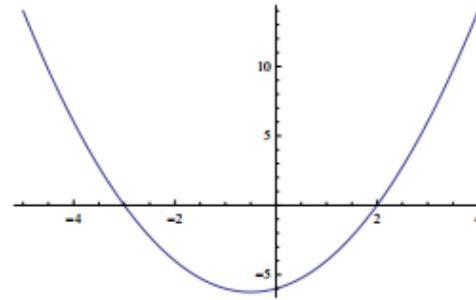
# Izgled grafa kvadratne funkcije:



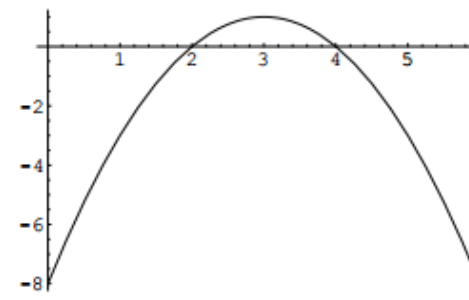
(a)  $a > 0, D < 0,$



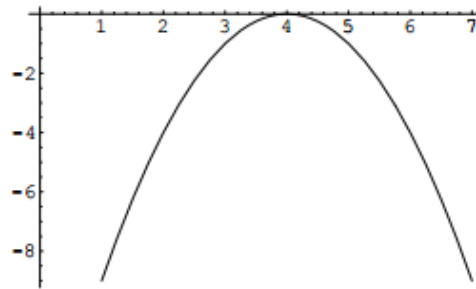
(b)  $a > 0, D = 0,$



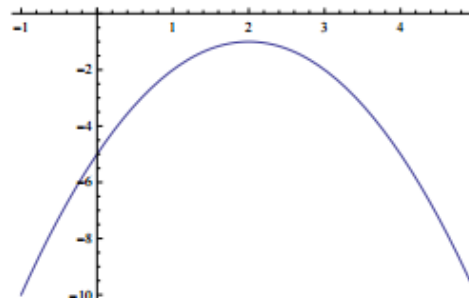
(c)  $a > 0, D > 0,$



(d)  $a < 0, D > 0,$



(e)  $a < 0, D = 0,$



(f)  $a < 0, D < 0,$

# Zadaci

1.1. Odredite  $f(x) + g(x)$  i  $f(x) - g(x)$  :

a)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ,  $g(x) = 2x^2 + x - 1$

b)  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 7$ ,  $g(x) = -3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

1.2. Odredite produkt zadanih polinoma  $f(x)$  i  $g(x)$

a)  $f(x) = 3x^2 - x + 1$ ,  $g(x) = x - 2$

b)  $f(x) = x^3 + 1$ ,  $g(x) = x^5 + x^2 - 1$



# Zadaci

1.3. Podijelite zadane polinome  $f(x)$  i  $g(x)$

a)  $f(x) = x^3 - 1, g(x) = x - 1$

b)  $f(x) = 8x^3 - 14x^2 + x, g(x) = 2x - 3$

c)  $f(x) = x^4 + 3x^3 + x - 1, g(x) = x^2 - 1$

# Zadaci

1.4. Skicirajte graf funkcije

a)  $f(x) = 2x - 4$

b)  $f(x) = -x - 2$

c)  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

1.5. Skicirajte graf funkcije

a)  $f(x) = x^2 - 4$

b)  $f(x) = -2(x + 1)(x - 2)$

c)  $f(x) = 2x - 5 - x^2$

# Zadaci

1.6. Nađite rješenja nejednadžbi:

a)  $4(x + 2) + 2(1 - 5x) > x + 3$

b)  $x - \frac{2-x}{3} \geq 1 + \frac{x}{2}$

c)  $\frac{2}{3} - \frac{x+2}{2} < \frac{x-10}{6}$

1.7. Nađite rješenja nejednadžbi:

a)  $3x^2 - 11x < 4$

b)  $4 - x > 5x^2$

c)  $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$

Knjiga „*Matematika za IT*“, QR kod str. 25.

# Racionalna funkcija

Racionalna funkcija je funkcija oblika:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

pri čemu su  $p(x)$  i  $q(x)$  polinomi.

Prava racionalna funkcija – stupanj polinoma u brojniku je manji od stupnja polinoma u nazivniku

Domena racionalne funkcije – skup svih realnih brojeva koji nisu nultočke nazivnika

Nultočke racionalne funkcije – nultočke brojnika

# Iracionalna funkcija

Iracionalne funkcije su funkcije kod kojih se argument  $x$  nalazi pod znakom korijena.

Domena ovisi o parnosti korijena.

Domena funkcije  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$  (pri čemu je  $g(x)$  neka funkcija):

- ako je  $n$  paran: domenu funkcije određujemo tražeći rješenja nejednadžbe  $g(x) \geq 0$ .
- ako je  $n$  neparan: neparna iracionalna funkcija ne postavlja dodatne uvijete na domenu. Domena funkcije  $f(x)$  je jednaka domeni funkcije  $g(x)$ .

# Zadaci

2.1. Odredite domenu i nultočke sljedećih racionalnih funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\text{e) } f(x) = x + 2 - \frac{1}{x+2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x-3}{x^2-16}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{2x}{2x+1} + \frac{x}{x+4} - 1$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{4x-x^2}{x^2+4}$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{x}{x^2+4x+3} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x+3}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-4x}$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{21}{x^2-3x-10} - \frac{4}{x-5} + \frac{3}{x+2}$$

# Zadaci

2.2. Riješite sljedeće nejednadžbe :

a)  $\frac{2}{x} \leq 0$

e)  $\frac{x+2}{x-3} < 2$

b)  $\frac{-3}{x+1} \geq 0$

f)  $\frac{(x+2)(x-3)}{x+1} \geq 0$

c)  $\frac{x-2}{x+2} > 0$

g)  $\frac{-x-2}{x+1} - \frac{1}{1-x} \leq 0$

d)  $\frac{1}{x-1} \geq 1$

h)  $\frac{2}{x+4} \leq \frac{1}{x-1}$

Knjiga „*Matematika za IT*“, QR kod str. 34.

# Zadaci

2.3. Odredite domenu i nultočke sljedećih funkcija:

a)  $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

e)  $f(x) = \sqrt[5]{2x^3 - 4x}$

b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

f)  $f(x) = \sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 2}$

c)  $f(x) = \sqrt[4]{5x - x^2}$

g)  $f(x) = \sqrt{x + 4} - \sqrt{2 - x}$

d)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 10}$

Knjiga „*Matematika za IT*“, QR kod str. 40.



# Eksponeñcijalna funkcija

Neka je  $a$  pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definiranu formulom

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

nazivamo eksponeñcijalna funkcija s bazom  $a$ .

## Svojstva eksponeñcijalne funkcije

Za svaki  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijedi:

1.  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

2.  $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

3.  $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$

# Logaritamska funkcija

Neka je  $a$  pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu formulom

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0$$

nazivamo logaritamska funkcija s bazom  $a$ .

**Svojstva logaritamske funkcije** (za sve  $x, y \in \mathbb{R}^+$ )

1.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

5.  $\log_a a = 1$

2.  $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

6.  $\log_a 1 = 0$

3.  $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

7.  $\log_a a^x = x$

4.  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

8.  $a^{\log_a x} = x$

# Zadaci

3.1 Riješite sljedeće jednačbe:

a)  $5^{2x} = 125$       b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$       c)  $4^{3x+5} = 16$       d)  $3 \cdot 10^{2x-1} = 3000$

3.2 Riješite sljedeće jednačbe:

a)  $0.01^x \cdot 10^{-3} = (\sqrt{10})^{-x}$       b)  $\left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot (0.25)^{2x-3} = 2^5$

3.3 Riješite sljedeće jednačbe:

a)  $3^{x+1} - 3^{x-1} = 8$       b)  $5^{2x+2} + 25^{x-1} = 626$

# Zadaci

3.4 Riješite sljedeće jednačbe (rješenje iskažite pomoću prirodnog logaritma):

a)  $2^x = 10$       b)  $2^x = 3^{2x-1}$       c)  $\frac{3^x}{5^{x+1}} = 15$       d)  $(3^{x-1})^2 = e^3$

3.5 Riješite sljedeće jednačbe (rješenje iskažite pomoću dekadskog logaritma):

a)  $2^x = 10$       b)  $2^{x+2} \cdot 5^{x-1} = 100$       c)  $(3^{x-1})^2 = e^3$

# Zadaci

3.6 Odredite domenu funkcije i riješite sljedeće jednačbe:

a)  $\log_2 x = 3$

b)  $\log_5(x - 1) = 4$

c)  $3 \ln(3x + 2) = -3$

d)  $10 + \log(x + 5) = 11$

3.7 Odredite domenu funkcije i riješite sljedeće jednačbe:

a)  $2 \log(x + 1) = 0$

b)  $2 \log(2x + 1) = 0$

c)  $\ln(x^2 + 2x + 2) = 0$

Knjiga „*Matematika za IT*“, QR kod str. 50.

# Trigonometrijski omjeri

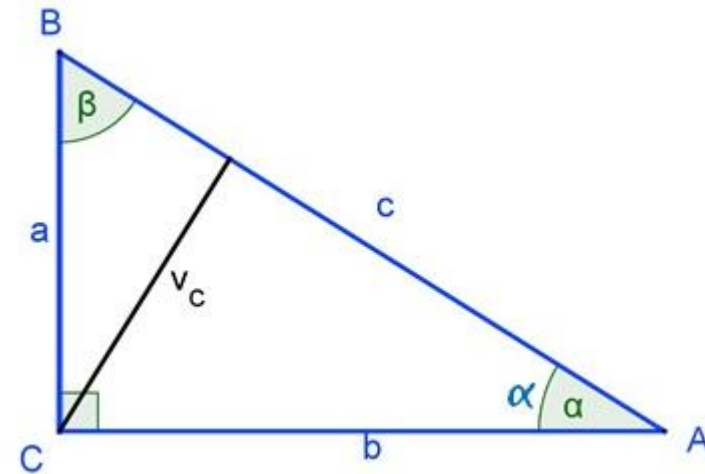
Definiramo ih u pravokutnom trokutu:

$$\text{sinus kuta} = \frac{\text{duljina nasuprotne stranice}}{\text{duljina hipotenuze}}$$

$$\text{kosinus kuta} = \frac{\text{duljina priležeće stranice}}{\text{duljina hipotenuze}}$$

$$\text{tangens kuta} = \frac{\text{duljina nasuprotne stranice}}{\text{duljina priležeće stranice}}$$

$$\text{kotangens kuta} = \frac{\text{duljina priležeće stranice}}{\text{duljina nasuprotne stranice}}$$



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

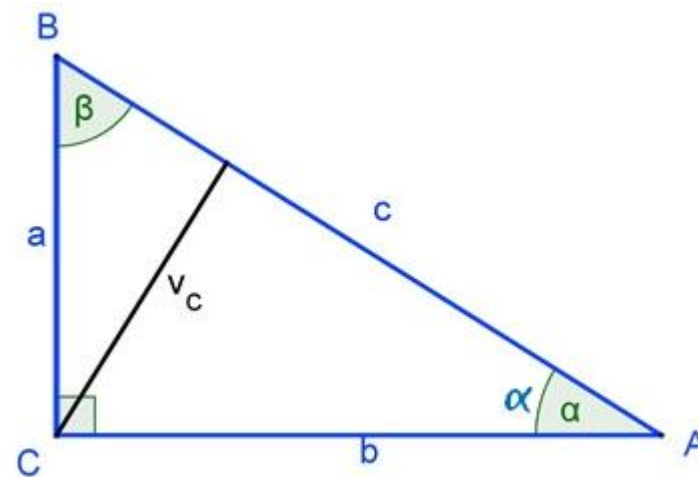
$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{ctg } \beta = \frac{a}{b}$$

# Vrijednosti trigonometrijskih omjera nekih kutova:

kut $\alpha$	$0\pi$ $0^\circ$	$\frac{\pi}{6}$ $30^\circ$	$\frac{\pi}{4}$ $45^\circ$	$\frac{\pi}{3}$ $60^\circ$	$\frac{\pi}{2}$ $90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

# Zadaci

4.1. Odredite vrijednosti stranica i kutova u pravokutnom trokutu ako je (a, b – duljine kateta, c – duljina hipotenuze):

a)  $c = 6 \text{ cm}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $a = 5 \text{ cm}, \alpha = 35^\circ$

b)  $a = 3 \text{ cm}, \sin \alpha = 0.6$

e)  $c = 10 \text{ cm}, \alpha = 70^\circ$

c)  $a = 5 \text{ cm}, \operatorname{tg} \alpha = 1$

f)  $b = 8 \text{ cm}, \alpha = 50^\circ$

4.2. Odredite vrijednosti kutova u pravokutnom trokutu ako je (a, b – duljine kateta, c – duljina hipotenuze):

a)  $a = 5 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}$

b)  $a = 6 \text{ cm}, b = 9 \text{ cm}$

c)  $b = 4 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}$



# Zadaci

4.3 Zadan je jednakokrani trokut s oznakama:  $a$  = duljina osnovice,  $b$  = duljina kraka,  $\alpha$  = veličina kuta uz osnovicu,  $\beta$  = veličina kuta između krakova. Odredite:

a)  $a = 12\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$                        $\alpha, \beta, P = ?$

b)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $a = 20 \text{ cm}$                        $b, P = ?$

c)  $\alpha = 50^\circ$ ,  $b = 14 \text{ cm}$                        $a, O = ?$

4.4 Zadan je pravokutnik.

a) Duljina dijagonale je 6 cm, veličina kuta između dijagonale i kraće stranice je  $30^\circ$ , odredite opseg i površinu pravokutnika.

b) Duljina duže stranice je 8 cm, veličina kuta između dijagonale i dulje stranice je  $45^\circ$ , odredite opseg i površinu pravokutnika.

Knjiga „*Matematika za IT*“, QR kod str. 67.

**Hvala na pažnji!**

