

# MATEMATIČKA ANALIZA

Logaritamsko  
deriviranje i  
derivacije višeg reda

# Implicitno zadane funkcije

Jednadžbu pravca možemo zapisati na dva načina:

## 1. Eksplicitna jednadžba pravca

$$y = kx + l \quad \text{na primjer: } y = -2x + 3$$

## 2. Implicitna jednadžba pravca

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{na primjer: } 2x + y - 3 = 0$$

# Implicitno zadane funkcije

Funkcije se općenito mogu pisati na ta dva oblika:

1. Eksplicitna jednačba funkcija

$$y = f(x) \quad \text{na primjer: } y = \sqrt{1 - x^2}$$

2. Implicitna jednačba funkcije

$$f(x, y) = 0 \quad \text{na primjer: } x^2 + y^2 - 1 = 0$$

# Implicitno zadane funkcije

Mi ćemo promatrati samo implicitno zadane funkcije koje su oblika:

$$f(y) = g(x)$$

Na primjer, funkciju čiji je graf jedinična kružnica bi u tom obliku zapisali kao:  $y^2 = 1 - x^2$

# Implicitno zadane funkcije

Kako deriviramo tako zapisanu funkciju?

$$f(y) = g(x)$$

Lijevu stranu te jednadžbe promatramo kao kompoziciju funkcija  $f$  i  $y$ , te ju tako i deriviramo

$$f(y(x)) = g(x)$$

$$f'(y) \cdot y' = g'(x) \qquad y' = \frac{g'(x)}{f'(y)}$$

# Implicitno zadana funkcija

Odredite derivaciju na elipsu  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$  u točki  $T(2,1)$ .

$$y^2 = 3 - \frac{x^2}{2}$$

$$2y \cdot y' = -\frac{1}{2} \cdot 2x \quad y' = -\frac{x}{2y} \quad y'(T) = -1$$

# Logaritamska derivacija

Derivaciju implicitno zadanih funkcija koristiti ćemo u postupku koji nazivamo logaritamsko deriviranje.

Taj postupak koristimo za određivanje derivacija funkcija koje i u bazi i u eksponentu imaju varijablu  $x$ .

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Na primjer:  $y = x^x$ ,  $y = (\sin x)^{\ln x}$ , ...

# Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije  $y = x^x$ .

1. Funkciju logaritmujemo

$$\ln y = \ln x^x$$

2. Spustimo potenciju ispred logaritma

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

3. Deriviramo dobivenu implicitnu funkciju



# Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije  $y = x^x$ .

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$$

# Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije  $y = x^x$ .

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$$

Na kraju, jednačbu pomnožimo s  $y$ :

$$y' = y \cdot (\ln x + 1)$$

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

# Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije  $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$ .

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sin x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\sqrt{x})' \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot (\ln(\sin x))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x$$

# Logaritamska derivacija

Odredite derivaciju funkcije  $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$ .

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x$$

$$y' = y \cdot \left( \frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \operatorname{ctg} x \right)$$

$$y' = (\sin x)^{\sqrt{x}} \cdot \left( \frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \operatorname{ctg} x \right)$$

# Derivacije višeg reda

Ako je funkcija  $f$  derivabilna u svakoj točki otvorenog intervala  $I$  onda znamo da je dobro definirana funkcija

$$f \rightarrow f'(x)$$

Ako u točki  $x_0$  postoji limes

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$$

kažemo da funkcija  $f$  ima drugu derivaciju u točki  $x_0$  koju označavamo  $f''(x_0)$ .

# Derivacije višeg reda

Definirano je preslikavanje  $x_0 \rightarrow f''(x_0)$  za koje vrijedi:

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

Analogno se definiraju i derivacije višeg reda:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

Rekurzivna definicija derivacija višeg reda.

# Derivacije višeg reda

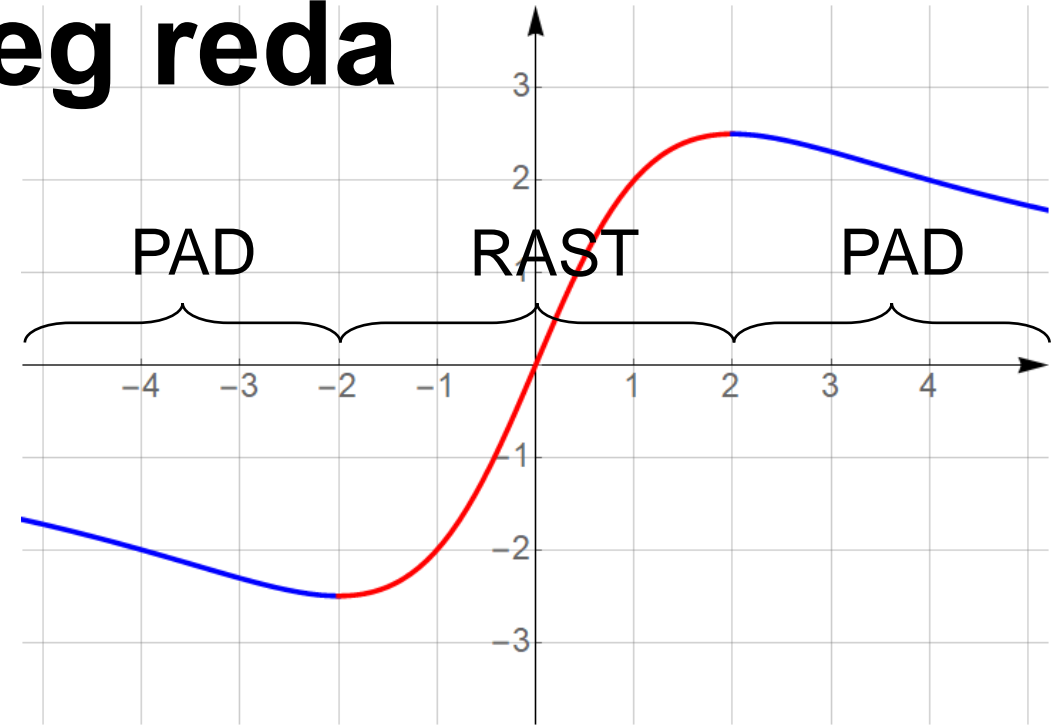
Interpretacije derivacija višeg reda u fizici (kinematici):

- funkcija  $x(t)$  mjeri **položaj** točke u trenutku  $t$
- funkcija  $v(t) = x'(t)$  mjeri **brzinu** točke u trenutku  $t$
- funkcija  $a(t) = x''(t)$  mjeri **ubrzanje** točke u trenutku  $t$
- funkcija  $j(t) = x'''(t)$  mjeri **trzaj** točke u trenutku  $t$

# Derivacije višeg reda

Interpretacija derivacija u geometriji:

Na grafu funkcije  $y = f(x)$  prva derivacija funkcije određuje intervale rasta i pada.



$$f'(x) > 0, \quad f(x) \text{ raste}$$

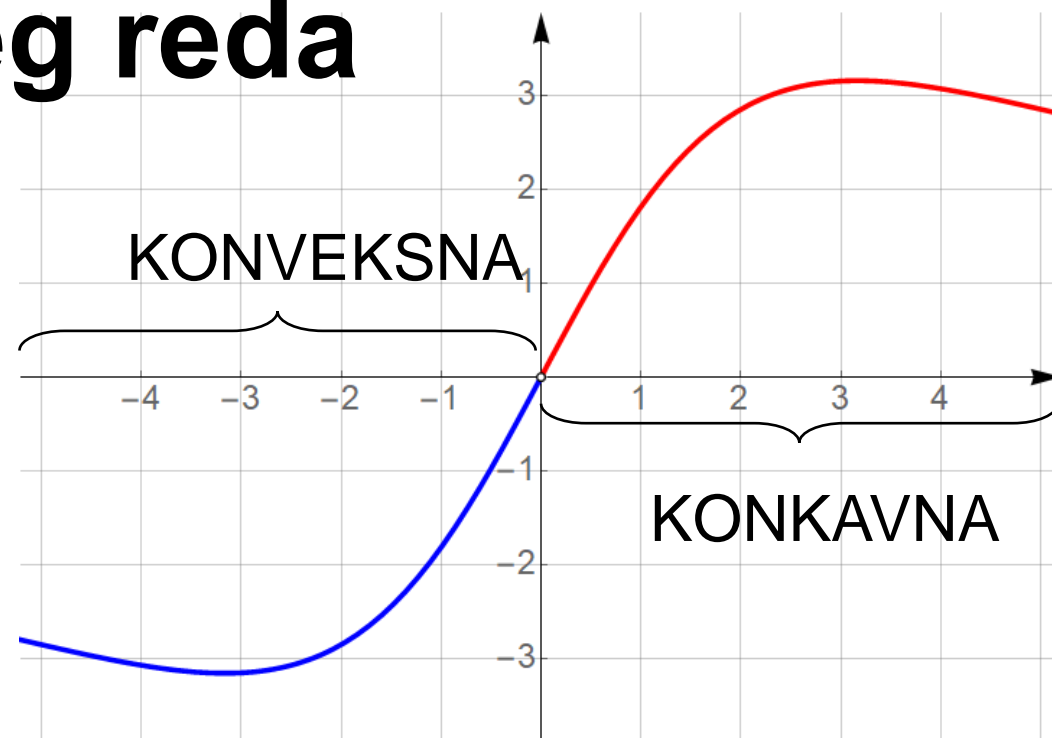
$$f'(x) < 0, \quad f(x) \text{ pada}$$



# Derivacije višeg reda

Interpretacija derivacija višeg reda u geometriji:

Na grafu funkcije  $y = f(x)$  druga derivacija funkcije određuje **intervale zakrivljenosti**.



$$f''(x) > 0, \text{ konveksna}$$

$$f''(x) < 0, \text{ konkavna}$$

# Derivacije višeg reda

Primjer 1. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 4$$

Rješenje:  $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x \qquad f^{iv}(x) = 24$$

$$f'''(x) = 24x - 12 \qquad f^{(n)}(x) = 0, \qquad \forall n, n \geq 5$$

# Derivacije višeg reda

Primjer 2. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f^{(4)}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

$$f''(x) = -1 \cdot x^{-2}$$

$$f^{(5)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

# Derivacije višeg reda

Primjer 3. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$$

$$f''(x) = 4 \cdot e^{2x}$$

$$f'''(x) = 8 \cdot e^{2x}$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$$

# Derivacije višeg reda

Primjer 4. Odredite sve derivacije funkcije

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{MOD}(n, 4) = 0 \\ \cos x, & \text{MOD}(n, 4) = 1 \\ -\sin x, & \text{MOD}(n, 4) = 2 \\ -\cos x, & \text{MOD}(n, 4) = 3 \end{cases}$$

Hvala 😊