

Vjerojatnost i statistika

**VJEŽBE – dio 5
(ISHOD 3)**



5. NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

Slučajne varijable i razdiobe

ISHOD 3 – SLUČAJNE VARIJABLE

Diskretne: $X \sim$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

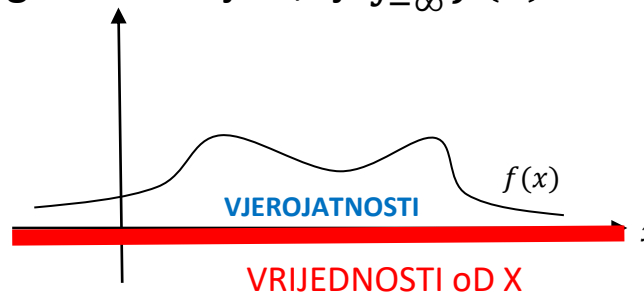
Vrijednosti od X ima konačno ili beskonačno prebrojivo mnogo

Neprekidne: **vrijednosti** od X ima beskonačno neprebrojivo mnogo, tj. one čine neki interval realnih brojeva ili čine čak cijeli \mathbb{R}

Neprekidne slučajne varijable su definirane tzv. **funkcijom gustoće** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

1. $f(x) \geq 0$, tj. graf joj je iznad ili na x-osi
2. Površina koju zatvara njen graf s x-osi je 1, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, jer **površina predstavlja vjerojatnost.**

Tamo gdje je gustoća viša, tamo su češće vrijednosti.



1. Neka je X slučajna varijabla s gustoćom f . Odredite konstantu c ako je:

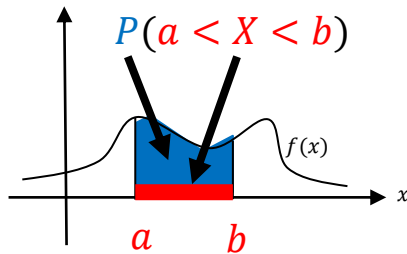
$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} c, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} c \cdot x, & 0 \leq x \leq 1 \\ c \cdot (3 - x), & 1 < x \leq 3. \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

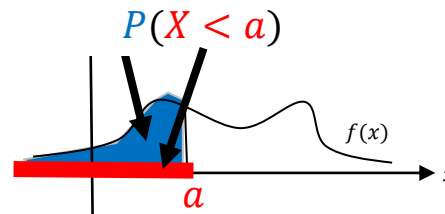
Veza između računanja vjerojatnosti i funkcije gustoće f :

Vjerojatnost da se ostvari vrijednost iz nekog intervala jednaka je površini ispod funkcije gustoće f and tim intervalom. Imamo tri slučaja:

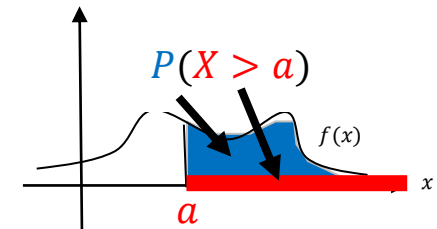
Vjerojatnost da se ostvari **vrijednost između dva broja** jednaka je **površini** ispod gustoće **između** ta dva broja.



Vjerojatnost da se ostvari **vrijednost manja od nekog broja** jednaka je **površini** ispod gustoće **lijevo** od tog broja.



Vjerojatnost da se ostvari **vrijednost veća od nekog broja** jednaka je **površini** ispod gustoće **desno** od tog broja.



Imamo:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx,$$

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx,$$

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Površina nad jednim konkretnim brojem je 0, tj. $P(X = a) = 0$.

Prema tome, za neprekidne slučajne varijable, gdje stoji znak $<$ može stajati i znak \leq , odnosno, ista je vjerojatnost/površina ako imamo $>$ ili \geq , primjerice:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

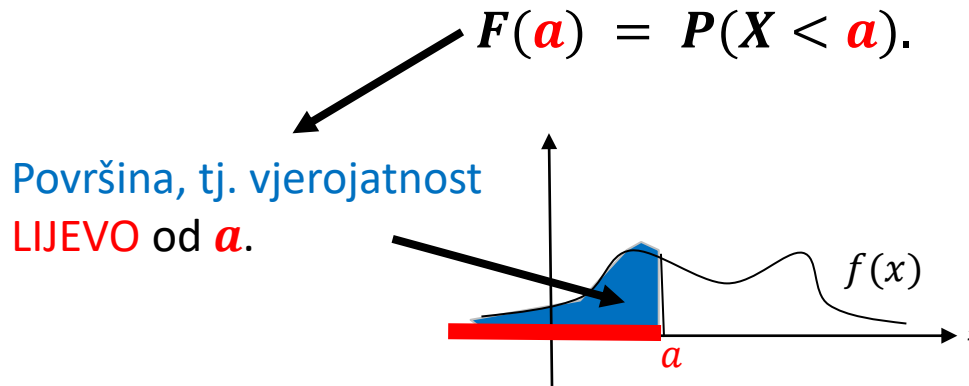
2. Neka je X slučajna varijabla s gustoćom $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2x}, & 1 < x \leq e. \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Izračunajte sljedeće vjerojatnosti:

- a) $P(X \leq 0.5)$,
- b) $P(X < 3)$,
- c) $P(X \geq \sqrt{0.2})$,
- d) $P(0.4 \leq X \leq 0.8)$,
- e) $P(-0.6 < X < 2)$.

Funkcija razdiobe

Funkcija razdiobe (ili distribucije) slučajne varijable X je funkcija $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ definirana formulom



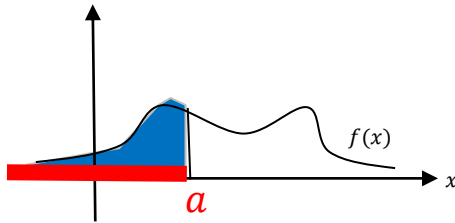
Veza između funkcije razdiobe F i funkcije gustoće f :

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$f(x) = F'(x).$$

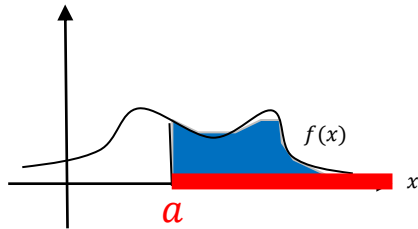
Funkcija razdiobe

Veza između računanja vjerojatnosti i funkcije razdiobe F :



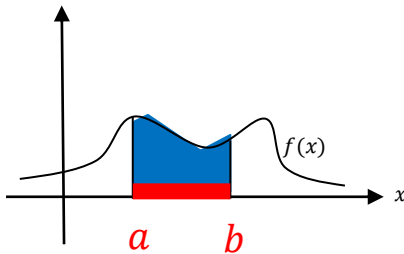
LIJEVO od a = LIJEVO od a

$$P(X < a) = F(a)$$
$$\leq$$



DESNO od a = $1 -$ LIJEVO od a

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$
$$\geq$$



IZMEĐU a i b = LIJEVO od b - LIJEVO od a

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$
$$\leq \leq$$

3. Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable X s gustoćom:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2x}, & 1 < x \leq e. \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

4. Zadana je funkcija razdiobe slučajne varijable X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

- Odredite funkciju gustoće slučajne varijable X .
- Nacrtajte graf funkcije gustoće.
- Odredite konstantu a za koju je $P(0 < X < a) = 0.25$.

Očekivanje i disperzija

OČEKIVANJE OD X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

OČEKIVANJE OD X^2

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

DISPERZIJA (VARIJANCA)

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

5. Odredite očekivanje i disperziju slučajne varijable X s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2x}, & 1 < x \leq e. \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

6. Odredite konstantu c , funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable X s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin(3x), & \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}. \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

7. Odredite konstantu c , funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable X s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \ln x, & 1 < x < e \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Eksponecijalna razdioba

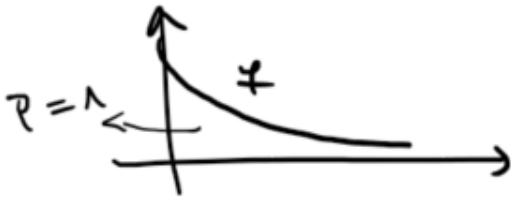
Eksponecijalna slučajna varijabla X s parametrom λ :

– **vrijednosti** su joj **vrijeme do prve pojave nekog događaja**

– primjerice, vrijeme do prvog kvara (tj. vrijeme ispravnog rada), vrijeme do prvog poziva, vrijeme do prvog ulova ribe,...

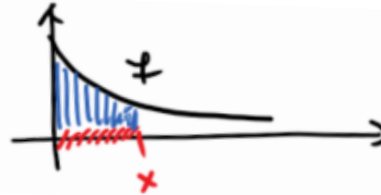
Funkcija gustoće:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$



Funkcija razdiobe (vjerojatnost LIJEVO od x):

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$



Pišemo:

$$X \sim E(\lambda)$$

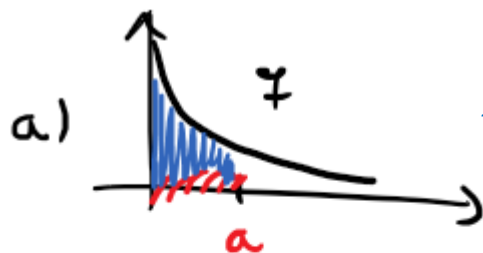
Očekivanje:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Disperzija:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

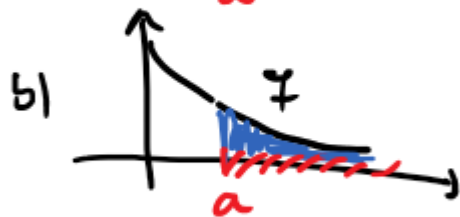
Računamo vjerojatnosti pomoću funkcije razdiobe F :



LIJEVO od a = LIJEVO od a

$$P(X < a) = F(a)$$

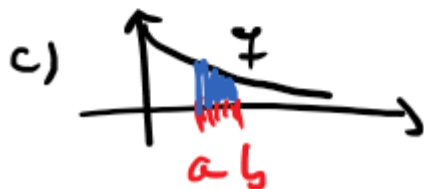
\leq



DESNO od a = $1 -$ LIJEVO od a

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

\geq



IZMEĐU a i b = LIJEVO od b - LIJEVO od a

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$\leq \leq$

8. Neka je X slučajna varijabla distribuirana po eksponencijalnom zakonu s očekivanjem 4 dana. Odredite:

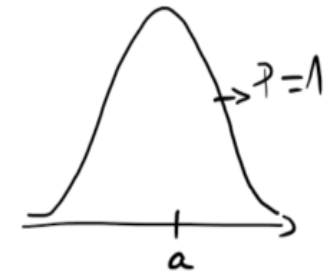
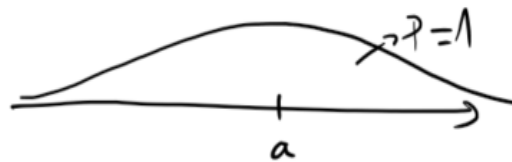
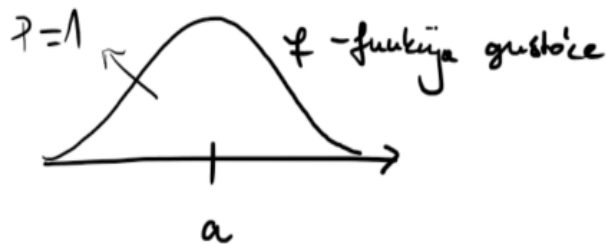
- a) $P(X < 5)$,
- b) $P(X > 3)$,
- c) $P(2 \leq X \leq 6)$,
- d) konstantu a takvu da je $P(X < a) = 0.4$.

9. Vrijeme ispravnog rada nekog sklopa je slučajna varijabla distribuirana po eksponencijalnom zakonu s parametrom $\lambda = 0.1$ (u godinama).

- a) Kolika je vjerojatnost da će se sklop pokvariti prije kraja druge godine?
- b) Kolika je vjerojatnost da će se sklop pokvariti tijekom druge godine?
- c) Kolika je vjerojatnost da će se sklop pokvariti tijekom druge godine ako je poznato da se tijekom prve godine nije nalazio u kvaru?

Normalna razdioba

- Funkcija gustoće f normalne razdiobe ima oblik zvona, zove se još i Gaussova krivulja.
- **Vrijednosti** normalne slučajne varijable su od $-\infty$ do $+\infty$ (tj. cijeli \mathbb{R})
- Ovisi o dva broja, tj. normalna razdioba ima dva parametra u oznakama a i σ .
- Najviša točka gustoće je iznad a , a njena širina ovisi o σ – veća σ , veća širina (za isti a).
- Naravno, ukupna površina ispod gustoće je 1.



Pišemo: $X \sim N(a, \sigma^2)$

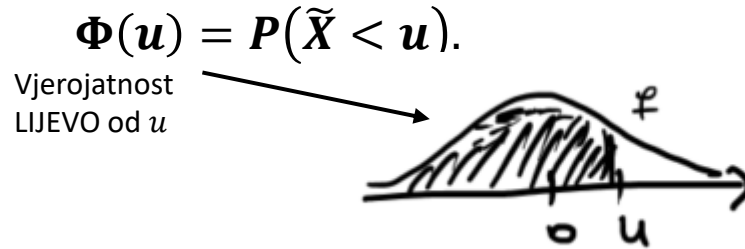
Očekivanje: $E(X) = a$

Disperzija: $D(X) = \sigma^2$

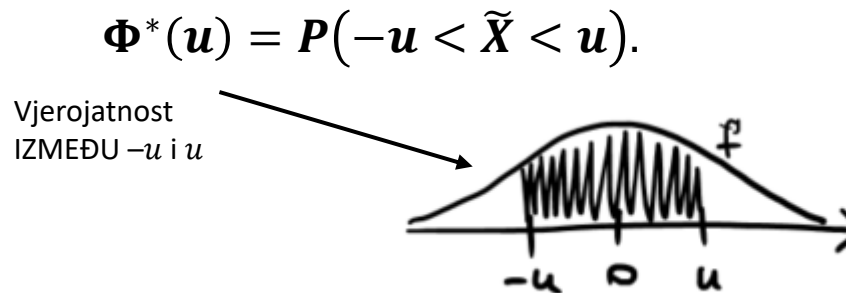
pa je standardna devijacija = σ

Vrlo važna je tzv. **jedinična normalna razdioba** \tilde{X} s parametrima $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$, tj. $\tilde{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.
Njezinu **funkciju razdiobe** označavamo sa $\Phi(u)$ umjesto sa $F(x)$.

Znači,



Nema gotove formule za nju (zbog toga što je formula gustoće f neintegrabilna te ju zato nismo niti navodili) pa se često uvodi još jedna funkcija, $\Phi^*(u)$, čije su vrijednosti tabelirane preko koje dolazimo do vjerojatnosti. Vrijedi



Njihova veza:
$$\Phi(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi^*(u)$$

Može zatrebati:
$$\Phi^*(-u) = -\Phi^*(u)$$


Procedura za računanje vjerojatnosti:


1. Ako nemamo danu $\tilde{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ već neku drugu $X \sim N(\mathbf{a}, \sigma^2)$, prvo radimo transformaciju iz X u \tilde{X} pomoću


$$\tilde{X} = \frac{X - \mathbf{a}}{\sigma} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

unutar vjerojatnosti. Ako imamo, idi na korak 2.

2. Zapis sa vjerojatnošću P mijenjamo sa zapisom sa Φ prema odgovarajućem slučaju:

a)  $P(\tilde{X} < u) = \Phi(u)$
 \leq

b)  $P(\tilde{X} > u) = 1 - \Phi(u)$
 \geq

c)  $P(u_1 < \tilde{X} < u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$
 $\leq \leq$

3. Zapis sa Φ mijenjamo sa zapisom sa Φ^* pomoću:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi^*(u)$$

Može zatrebati: $\Phi^*(-u) = -\Phi^*(u)$

4. $\Phi^*(u)$ čitamo iz tijela tablice

10. Neka je $X \sim N(0,1)$. Izračunajte:

- a) $P(X < 1.96)$,
- b) $P(X > 1.64)$,
- c) $P(-1.45 \leq X \leq 1.23)$.

11. Neka je $X \sim N(1,16)$. Izračunajte:

- a) $P(X \leq 3)$,
- b) $P(X \geq 2)$,
- c) $P(0 \leq X \leq 4)$.

12. Neka vrsta automobilske gume može prijeći udaljenost koja je približno normalno distribuirana s očekivanjem 22 000 km i standardnom devijacijom 1000 km. Kolika je vjerojatnost da će automobilska guma te vrste prijeći između 19 000 km i 23 000 km?

13. Na nekom ispitu su bodovi studenata bili normalno distribuirani s očekivanjem 76 bodova i disperzijom 225 bodova. Od ukupno 100 bodova, za prolaz je bilo potrebno 55 bodova, a za odličan 94 boda.

- a) Koliki postotak studenata nije položio ispit?
- b) Koliki postotak studenata je dobio ocjenu odličan?

Stabilnost normalne razdiobe

Neka su X_1 i X_2 **nezavisne** slučajne varijable s normalnom distribucijom $X_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$ i neka su α_1, α_2 realni brojevi. Tada vrijedi

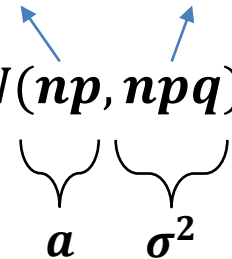
$$\underbrace{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2}_X \sim N\left(\underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}_a, \underbrace{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2}_{\sigma^2}\right).$$

Aproksimacija binomne distribucije normalnom

Sljedeće koristimo za računanje vjerojatnosti da binomna poprimi vrijednosti iz nekog (diskretnog) intervala.

Neka je $X \sim B(n, p)$. Tada za dovoljno veliki n vrijedi $B(n, p) \approx N(np, npq)$.

Očekivanje binomne Disperzija binomne



14. Dnevna zarada u nekom restoranu normalno je distribuirana s očekivanjem 2200 kuna i standardnom devijacijom 230 kuna. Ako su dnevne zarade međusobno nezavisne, izračunajte vjerojatnost da ukupna zarada u dva uzastopna dana bude veća od 5000 kuna.

15. Vjerojatnost da matična ploča stigne ispravna u trgovinu je 0.98. Kontrolira se slučajnim izborom 1000 matičnih ploča. Procijenite vjerojatnost da broj ispravnih matičnih ploča bude između 971 i 989.

Zadaci za vježbu

16. Je li funkcija

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x, & 0 \leq x \leq 2 \\ (c - 1) \cdot x^2, & 2 < x \leq 4 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

funkcija gustoće neke slučajne varijable?

17. Neka je X slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

a) Odredite konstantu c .

b) Izračunajte $P(X > 1)$.

18. Neka je X slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x + \frac{1}{8}x^2, & 2 < x \leq 4 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Zadaci za vježbu

Izračunajte sljedeće vjerojatnosti:

- a) $P(X < 0.5)$,
- b) $P(X \leq 3)$,
- c) $P(X \geq 1)$,
- d) $P(X > 2.5)$
- e) $P(-0.5 < X \leq 1.5)$,
- f) $P(1 \leq X < 3)$.

19. Odredite funkciju distribucije, očekivanje i disperziju slučajne varijable X iz prethodnog zadatka.

20. Zadana je funkcija distribucije slučajne varijable X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

- a) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable X .
- b) Nacrtajte graf funkcije gustoće.
- c) Odredite konstantu a za koju je $P(X > a) = 0.5$.

Zadaci za vježbu

21. Odredite konstantu c , funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable X s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x^2 + 2x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

22. Odredite konstantu c , funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable X s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (e^x + 1), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Zadaci za vježbu

23. Neka je X slučajna varijabla distribuirana po eksponencijalnom zakonu s očekivanjem 0.5. Odredite:

- a) $P(X \leq 0)$,
- b) $P(X \geq 2)$,
- c) $P(X \leq 1)$,
- d) $P(1 < X < 2)$,
- e) konstantu a za koju je $P(X < a) = 0.05$.

24. Vrijeme do kvara (u satima) ventilatora u osobnom računalu je eksponencijalno distribuirano s parametrom $\lambda = 0.0003$.

- a) Koliki postotak ventilatora će trajati barem 10 000 sati?
- b) Koliki postotak ventilatora će trajati najviše 7 000 sati?

25. Neka je $X \sim N(0,1)$. Izračunajte:

- a) $P(0 < X < 1.42)$,
- b) $P(-0.73 \leq X < 2)$,
- c) $P(-1.73 < X < 2.01)$,
- d) $P(0.65 \leq X \leq 1.26)$,

Zadaci za vježbu

e) $P(-1.79 < X < -0.54)$,

f) $P(X > 1.13)$,

g) $P(|X| \leq 0.5)$.

26. Neka je $X \sim N(8, 16)$. Izračunajte:

a) $P(5 < X < 10)$,

b) $P(10 < X < 15)$,

c) $P(X > 15)$,

d) $P(X \leq 15)$.

27. Vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta je približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati. Ako je krenuo od kuće u 11:40, kolika je vjerojatnost da će zakasni na predavanje?

28. U paket stavljamo 3 proizvoda tipa A i 2 proizvoda tipa B . Ako težina proizvoda A ima $N(200, 100)$ razdiobu, a težina proizvoda B $N(100, 400)$ razdiobu, kolika je vjerojatnost da težina paketa bude veća od 750 g?

29. Procijenite vjerojatnost da se broj devetki među 10 000 na sreću odabranih znamenki nalazi između 940 i 1060.

Zadaci za vježbu

30. Prema podacima tehničke kontrole, kod prosječno 2% proizvedenih satova treba napraviti dopunsko reguliranje. Procijenite vjerojatnost da se od 300 slučajno odabranih satova ne obavlja dopunsko reguliranje na najmanje 290 satova.

Rješenja

1. a) $c = \frac{1}{4}$

b) $c = \frac{2}{5}$

2. a) 0.125

b) 1

c) 0.9

d) 0.24

e) $\frac{1+\ln 2}{2}$

3.
$$F(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0 \\ \frac{a^2}{2}, & 0 < a \leq 1 \\ \frac{1+\ln a}{2}, & 1 < a \leq e \\ 1, & a \geq e \end{cases}$$

4. a)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

c) $a = \frac{\pi}{6}$

Rješenja

$$5. E(x) = \frac{e}{2} - 1, D(x) = \frac{6e-1}{36}$$

$$6. c = 3, F(a) = \begin{cases} 0, & a \leq \frac{\pi}{6} \\ -\cos(3a), & \frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{3}, E(x) = \frac{\pi-1}{3} \\ 1, & a \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$7. c = 1, F(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 1 \\ a(\ln a - 1), & 1 < a < e, E(x) = \frac{e^2+1}{4} \\ 1, & a \geq e \end{cases}$$

8. a) 0.71349

b) 0.47237

c) 0.3834

d) 2.0433

9. a) 0.18127

b) 0.08611

c) 0.09516

Rješenja

10. a) 0.975

b) 0.050505

c) 0.81712

11. a) 0.69146

b) 0.401295

c) 0.37208

12. 0.839995

13. a) 8.1%

b) 11.5%

14. 0.0329

15. 0.95764

Rješenja zadatka za vježbu

16. Ne. Jedini kandidat za konstantu $c = \frac{59}{62}$, ali tada funkcija nije nenegativna.

17. a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}$

18. a) 0.04167

b) 0.95833

c) 0.83333

d) 0.14063

e) 0.375

f) 0.79167

$$19. F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{a^2}{6}, & 0 \leq a \leq 2 \\ \frac{a^3}{24} - \frac{a^2}{2} + 2a - \frac{5}{3}, & 2 < a \leq 4 \\ 1, & a > 4 \end{cases}, E(x) = \frac{31}{18}, D(x) = 0.50062$$

Rješenja zadatka za vježbu

$$20. a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$c) \frac{\pi}{2}$$

$$21. c = \frac{3}{4}, F(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0 \\ \frac{a^2(a+3)}{4}, & 0 < a < 1, E(x) = \frac{11}{16} \\ 1, & a \geq 1 \end{cases}$$

$$22. c = \frac{1}{e}, F(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0 \\ \frac{e^a + a - 1}{e}, & 0 < a < 1, E(x) = \frac{3}{2e} \\ 1, & a \geq 1 \end{cases}$$

Rješenja zadatka za vježbu

23. a) 0

b) 0.0183

c) 0.8646

d) 0.117

e) 0.02565

24. a) 4.98%

b) 87.75%

25. a) 0.422

b) 0.74555

c) 0.9359

d) 0.154

e) 0.2579

f) 0.1292

g) 0.383

Rješenja zadatka za vježbu

26. a) 0.4649

b) 0.6516

c) 0.0401

d) 0.95994

27. 0.7624

28. 0.934

29. 0.9545

30. 0.95