# ISHOD 3 – SLUČAJNE VARIJABLE

**Slučajna varijabla** je preslikavanje koje svakom rezultatu slučajnog pokusa pridružuje broj (vrijednost) po nekom pravilu. **Dijelimo ih na diskretne i neprekidne**.

## 4. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

**Diskretne slučajne varijable** poprimaju konačno ili prebrojivo mnogo vrijednosti (beskonačno mnogo vrijednosti koje možemo poredati u niz).

Zapis

$$\boldsymbol{X} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \dots \\ \boldsymbol{p_1} & \boldsymbol{p_2} & \boldsymbol{p_3} \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{različite vrijednosti (od najmanje do najveće)} \\ \longrightarrow \text{pripadne vjerojatnosti (zbrojene daju 1)} \end{array}$$

zovemo **zakonom razdiobe (distribucije) diskretne** slučajne varijable $X$.

### OČEKIVANJE od $X$

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots = \sum x_i p_i}$$

Prema tome, očekivanje možemo shvatiti kao **prosječnu vrijednost**, odnosno težinsku aritmetičku sredinu gdje su težine jednake vjerojatnostima pojedinih realizacija slučajne varijable.

### OČEKIVANJE od $X^2$

$$\boldsymbol{E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots = \sum x_i^2 p_i}$$

### DISPERZIJA (VARIJANCA)

$$\boldsymbol{D(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Disperzija je **mjera odstupanja** (i to kvadratnih odstupanja) vrijednosti $x_1$, $x_2$, ... slučajne varijable od prosjeka, tj. od očekivanja $E(X)$.

### STANDARDNA DEVIJACIJA

$$\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{D(X)}}$$

Standardna devijacija je također **mjera odstupanja** vrijednosti $x_1$, $x_2$, ... slučajne varijable od prosjeka, tj. od očekivanja $E(X)$.

## Svojstva očekivanja i disperzije

Za realne brojeve $\alpha$ i $\beta$ te slučajne varijable $X$ i $Y$ imamo sljedeće:

**Svojstva očekivanja**

1. $\boldsymbol{E(\alpha) = \alpha}$ očekivanje konstante (broja) je sam taj broj

2. $\boldsymbol{E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)}$ svojstvo linearnosti - kod zbrajanja slučajnih varijabli očekivanje se 'zalijepi' samo na slučajne varijable, tj. 'preskače' brojeve

3. Ako su $X$ i $Y$ **nezavisne**, tada vrijedi $\boldsymbol{E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)}$.

**Svojstva disperzije**

1. $\boldsymbol{D(\alpha) = 0}$ disperzija konstante (broja) je 0

2. $\boldsymbol{D(\alpha X) = \alpha^2 D(X)}$ broj koji množi slučajnu varijablu izlazi van disperzije s kvadratom

3. $\boldsymbol{D(X + \alpha) = D(X)}$ broj koji se zbraja sa slučajnom varijablom 'nestaje' pod disperzijom

4. Ako su $X$ i $Y$ **nezavisne**, tada vrijedi $\boldsymbol{D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)}$.

## Primjeri diskretnih slučajnih varijabli

# GEOMETRIJSKA SLUČAJNA VARIJABLA X

Ponavljamo pokus **DOK** se ne ostvari neki događaj $A$ (uspjeh). Teoretski, možda se nikad neće ostvariti $A$ pa **ponavljanja mogu ići do $\infty$.**

$X$- (redni) broj pokušaja DOK se ne ostvari događaj $A$

$\boldsymbol{p} = P(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja događaja $A$ pri *jednom* ponavljanju pokusa

$$\begin{array}{cccccc} A & \overline{A}\,A & \overline{A}\,\overline{A}\,A & \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,A & \dots & \dots \end{array}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \dots \\ \boldsymbol{p} & (1-\boldsymbol{p})^1 \cdot \boldsymbol{p} & (1-\boldsymbol{p})^2 \cdot \boldsymbol{p} & (1-\boldsymbol{p})^3 \cdot \boldsymbol{p} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ili kraće

$P(X = k) = (1 - \boldsymbol{p})^{k-1} \cdot \boldsymbol{p}, \quad k = 1,2, \dots \infty$

Pišemo $X \sim G(\boldsymbol{p})$

Očekivanje $E(X) = \frac{1}{p}$

Disperzija $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$

# BINOMNA SLUČAJNA VARIJABLA X

Određen broj puta ponavljamo pokus i brojimo koliko puta se desio neki događaj A (uspjeh).

$X$ – broj pojavljivanja nekog događaja $A$ pri $\boldsymbol{n}$ (nezavisnih) ponavljanja pokusa

$\boldsymbol{p} = P(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja događaja $A$

pri *jednom* ponavljanju pokusa

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \binom{\boldsymbol{n}}{0} \cdot \boldsymbol{p}^0 \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}} & \binom{\boldsymbol{n}}{1} \cdot \boldsymbol{p}^1 \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-1} & \binom{\boldsymbol{n}}{2} \cdot \boldsymbol{p}^2 \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-2} & \dots & \dots & \binom{\boldsymbol{n}}{n} \cdot \boldsymbol{p}^n \cdot (1-\boldsymbol{p})^0 \end{pmatrix}$$

Ili kraće

$$P(X = k) = \binom{\boldsymbol{n}}{k} \cdot \boldsymbol{p}^k \cdot (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-k}, \qquad k = 0,1,2,\dots,\boldsymbol{n}$$

3. broj razmještaja k uspjeha u nizu duljine n

1. na k mjesta u nizu množimo vjerojatnost uspjeha p

2. na preostalih n-k mjesta je vjerojatnost neuspjeha 1-

Pišemo $X \sim B(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$

Očekivanje $E(X) = np$

Disperzija $D(X) = npq, \qquad (q = 1 - p)$

# POISSONOVA SLUČAJNA VARIJABLA X

U nekoj jedinici vremena, prostora,... brojimo koliko puta se desio neki događaj A (uspjeh).

$X$ – broj pojavljivanja nekog događaja $A$ (uspjeha) **u nekoj jedinici** vremena, prostora, ...

**Intenzitet $\boldsymbol{\lambda}$** – *PROSJEČAN* broj pojavljivanja događaja $A$ **u toj jedinici**

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots \\ \frac{\boldsymbol{\lambda}^0}{0!} e^{-\boldsymbol{\lambda}} & \frac{\boldsymbol{\lambda}^1}{1!} e^{-\boldsymbol{\lambda}} & \frac{\boldsymbol{\lambda}^2}{2!} e^{-\boldsymbol{\lambda}} & \frac{\boldsymbol{\lambda}^3}{3!} e^{-\boldsymbol{\lambda}} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ili kraće

$$P(X = k) = \frac{\boldsymbol{\lambda}^k}{k!} e^{-\boldsymbol{\lambda}}, \qquad k = 0,1,2,\dots \infty$$

Pišemo $X \sim P(\boldsymbol{\lambda})$

Očekivanje $E(X) = \lambda$

Disperzija $D(X) = \lambda$