ISHOD 3 – SLUČAJNE VARIJABLE

Slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom rezultatu slučajnog pokusa pridružuje broj (vrijednost) po nekom pravilu. **Dijelimo ih na diskretne i neprekidne**.

5. NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

Neprekidne slučajne varijable X poprimaju beskonačno neprebrojivo mnogo vrijednosti, tj. vrijednosti čine neki interval realnih brojeva ili čine čak cijeli skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

FUNKCIJA GUSTOĆE f

Neprekidne slučajne varijable su definirane tzv. **funkcijom gustoće f**: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

1. $f(x) \geq 0$, tj. graf joj je iznad ili na x-osi
2. Površina koju zatvara njen graf s x-osi je 1, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(x)dx = 1}$, jer **površina predstavlja vjerojatnost**.

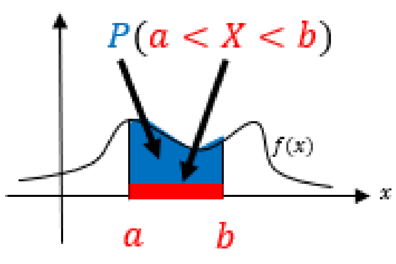
Tamo gdje je gustoća viša, tamo su češće vrijednosti.

Veza između **računanja vjerojatnosti** i **funkcije gustoće f**

Vjerojatnost da se ostvari vrijednost iz nekog intervala jednaka je površini ispod funkcije gustoće f and tim intervalom. Tu vjerojatnost/površinu računamo pomoću određenog integrala.

Primjerice:

Vjerojatnost da se ostvari vrijednost između dva broja jednaka je površini ispod gustoće između ta dva broja.



Imamo:

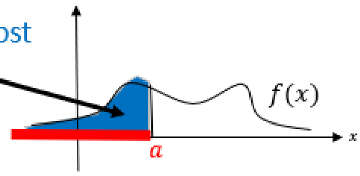
$\boldsymbol{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx,}$

FUNKCIJA RAZDIOBE (ili distribucije) F

Funkcija razdiobe (ili distribucije) slučajne varijable X je funkcija $F: \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(a) = P(X < a).$$

Površina, tj. vjerojatnost
LIJEVO od a.

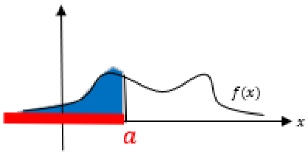


Veza između **funkcije razdiobe F** i **funkcije gustoće f**:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

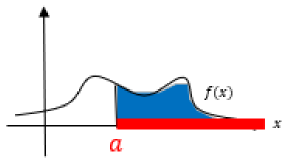
$$f(x) = F'(x).$$

Veza između **računanja vjerojatnosti** i **funkcije razdiobe F**:



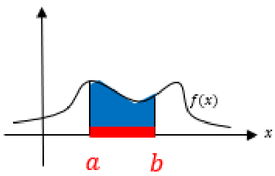
LIJEVO od a = LIJEVO od a

$$P(X < a) = F(a)$$
$$\leq$$



DESNO od a = 1 - LIJEVO od a

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$
$$\geq$$



IZMEĐU a i b = LIJEVO od b - LIJEVO od a

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$
$$\leq \quad \leq$$

OČEKIVANJE OD X $\qquad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

OČEKIVANJE OD X^2 $\qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$

DISPERZIJA (VARIJANCA) $\qquad \mathrm{D}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA

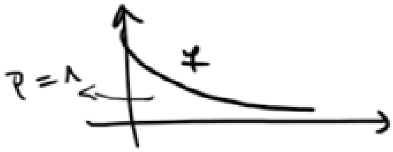
Eksponencijalna slučajna varijabla $\boldsymbol{X}$ s parametrom $\boldsymbol{\lambda}$:

– vrijednosti su joj vrijeme do prve pojave nekog događaja

– primjerice, vrijeme do prvog kvara (tj. vrijeme ispravnog rada), vrijeme do prvog poziva, vrijeme do prvog ulova ribe,...

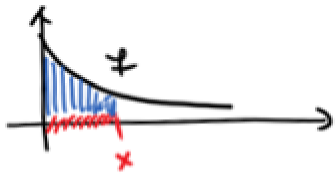
Funkcija gustoće f:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$



Funkcija razdiobe F (vjerojatnost LIJEVO od x):

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$



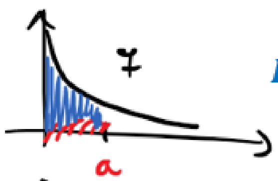
Pišemo: $\quad X \sim E(\lambda)$

Očekivanje: $\quad E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Disperzija: $\quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Računamo vjerojatnosti pomoću funkcije razdiobe F:

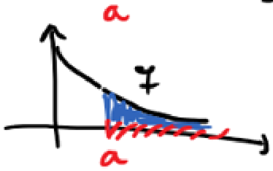
a)



LIJEVO od a = LIJEVO od a

$$P(X < a) = F(a)$$
$$\leq$$

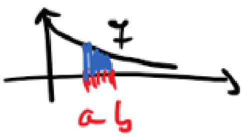
b)



DESNO od a = 1 - LIJEVO od a

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$
$$\geq$$

c)

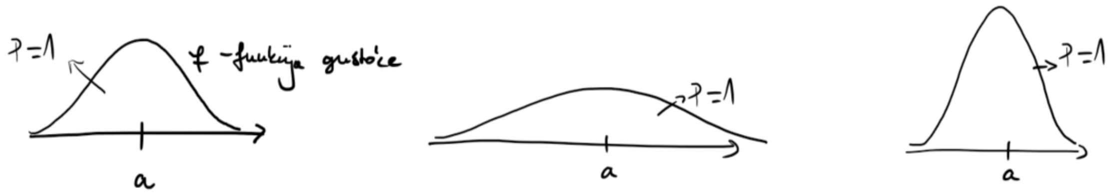


IZMEĐU a i b = LIJEVO od b - LIJEVO od a

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$
$$\leq \quad \leq$$

NORMALNA RAZDIOBA

- Vrijednosti normalne slučajne varijable su od $-\infty$ do $+\infty$ (tj. cijeli $\mathbb{R}$).
- Ovisi o dva broja, tj. normalna razdioba ima dva parametra u oznakama $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{\sigma}$.
- Najviša točka gustoće f je iznad $\boldsymbol{a}$, a njena širina ovisi o $\boldsymbol{\sigma}$ –> veća $\boldsymbol{\sigma}$, veća širina zvona/gustoće



Pišemo: $\boldsymbol{X \sim N(a,\, \sigma^2)}$

Očekivanje: $\boldsymbol{E(X) = a}$

Disperzija: $\boldsymbol{D(X) = \sigma^2}$

pa je **standardna devijacija =** $\boldsymbol{\sigma}$

Vrlo važna je tzv. **<u>jedinična</u> normalna razdioba** $\boldsymbol{\widetilde{X}}$ s parametrima $\boldsymbol{a = 0}$ i $\boldsymbol{\sigma = 1}$, tj. $\boldsymbol{\widetilde{X} \sim N(0,\, 1)}$.

Njezinu **funkciju razdiobe** označavamo sa $\boldsymbol{\Phi(u)}$ umjesto sa $F(x)$.

$$\boldsymbol{\Phi(u) = P(\widetilde{X} < u)}$$

Vjerojatnost
LIJEVO od u

Nema gotove formule za nju (zbog toga što je formula gustoće f neintegrabilna te ju zato nismo niti navodili) pa se često uvodi još jedna funkcija, $\boldsymbol{\Phi^*(u)}$, **čije su vrijednosti tabelirane** preko koje dolazimo do vjerojatnosti. Vrijedi

$$\boldsymbol{\Phi^*(u) = P(-u < \widetilde{X} < u)}.$$

Vjerojatnost
IZMEĐU $-u$ i u

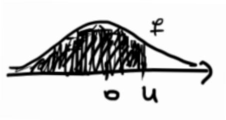
Procedura za računanje vjerojatnosti:

1. Ako nemamo danu $\widetilde{\boldsymbol{X}} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$ već neku drugu $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}})$, prvo radimo **transformaciju iz $\boldsymbol{X}$ u $\widetilde{\boldsymbol{X}}$** pomoću

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \frac{\boldsymbol{X} - \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sigma}} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$$

unutar vjerojatnosti. Ako imamo odmah danu $\widetilde{\boldsymbol{X}}$, idi na korak 2.

2. Zapis sa vjerojatnošću $\boldsymbol{P}$ mijenjamo sa zapisom sa $\boldsymbol{\Phi}$ prema odgovarajućem slučaju:

a) 

$$\boldsymbol{P}\big(\widetilde{\boldsymbol{X}} < \boldsymbol{u}\big) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$$

b) 

$$\boldsymbol{P}\big(\widetilde{\boldsymbol{X}} > \boldsymbol{u}\big) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$$

c) 

$$\boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{u}_{\mathbf{1}} < \widetilde{\boldsymbol{X}} < \boldsymbol{u}_{\mathbf{2}}\big) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_{\mathbf{2}}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_{\mathbf{1}})$$

3. Zapis sa $\boldsymbol{\Phi}$ mijenjamo sa zapisom sa $\boldsymbol{\Phi}^*$ pomoću:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Phi}^*(\boldsymbol{u})$$

Može zatrebati: $\boldsymbol{\Phi}^*(-\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{\Phi}^*(\boldsymbol{u})$

4. $\boldsymbol{\Phi}^*(u)$ čitamo iz tijela tablice

Stabilnost normalne razdiobe

Neka su X_1 i X_2 **nezavisne** slučajne varijable s normalnom distribucijom $X_1 \sim N(a_1,\ \sigma_1^2)$, $\mathrm{X}_2 \sim \mathrm{N}(a_2,\ \sigma_2^2)$ i neka su $\alpha_1,\ \alpha_2$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{X}_{\mathbf{2}}}_{\boldsymbol{X}} \sim \boldsymbol{N}\big(\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}}_{\boldsymbol{a}}, \underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2}}}_{\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}}\big).$$

Aproksimacija binomne distribucije normalnom

Sljedeće koristimo za računanje vjerojatnosti da binomna poprimi vrijednosti <u>iz nekog (diskretnog) intervala.</u>

Očekivanje binomne

Disperzija binomne

Neka je $X \sim B(n,\ p)$. Tada za dovoljno veliki n vrijedi $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{p}) \approx \boldsymbol{N}(\underbrace{\boldsymbol{np}}_{\boldsymbol{a}},\ \underbrace{\boldsymbol{npq}}_{\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}}).$