

Ponavljjanje za 2. međuispit – diskretne slučajne varijable

1. Bacamo dvije kocke. Slučajna varijabla X mjeri manji od brojeva na kockama. Odredi očekivanje i disperziju slučajne varijable X .

2. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable distribuirane po zakonu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- a) Odredite zakon razdiobe slučajne varijable $Z = X - Y$ te njeno očekivanje i disperziju.
b) Izračunajte disperziju slučajne varijable $Z = 2X - 3Y + 4$.

3. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju isti zakon razdiobe

$$X, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

- a) Izračunajte očekivanje slučajne varijable $Z = X \cdot Y$
b) Izračunajte disperziju slučajne varijable $Z = X \cdot Y$

4. Strijelac promašuje metu s vjerojatnošću 0.4.

- a) Kolika je vjerojatnost da će on u osam pokušaja pogoditi metu točno 3 puta?
b) Kolika je vjerojatnost da će on u osam pokušaja pogoditi metu barem 3 puta?

5. U kutiji se nalazi 7 kuglica od kojih su 4 bijele. Slučajno odabiremo 5 kuglica odjednom te neka slučajna varijabla X bilježi broj izvučenih bijelih kuglica.

- a) Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X .
b) Izračunajte disperziju slučajne varijable X .

6. Smjesa za kolačiće sadrži 200 grožđica. Vjerojatnost da je grožđica unutar smjese nejestiva (pokvarena) je 0.02. Napravljeno je 80 kolačića.

- a) Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani kolačić sadrži točno dvije nejestive grožđice.
b) Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani kolačić sadrži barem dvije nejestive grožđice.

7. Dječak jede male kolačiće dok ne naiđe na kolačić s grožđicom. Vjerojatnost da kolačić sadrži grožđicu je 0.8. Odredite:

- a) Vjerojatnost da je pojeo 3 kolačića
b) Vjerojatnost da je pojeo barem 3 kolačića
c) Vjerojatnost da nije naišao na grožđicu u prvih 2 kolačića
d) Očekivani broj pojedenih kolačića

8. Neka je X maksimalna vrijednost od dva na sreću odabrana broja iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, pri čemu isti broj može biti odabran dva puta. Izračunajte očekivanje slučajne varijable X .

9. Na neki server u toku jednog sata stigne u prosjeku 180 e-poruka. Odredite vjerojatnost da tijekom jedne minute stignu barem 4 e-poruke.

10. Na raspolaganju nam je jedno grlo za žarulje i ukupno 6 žarulja od kojih su 2 ispravne. Žarulje isprobavamo jednu za drugom, bez ponavljanja, dok se ne pojavi svjetlost. Slučajna varijable X označava redni broj pokušaja u kojem se pojavila svjetlost.
- Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X .
 - Izračunajte očekivanje slučajne varijable X .
11. U krug je upisan jednakostraničan trokut. Izračunajte vjerojatnost da će se od 10 na sreću odabranih točaka unutar kruga barem 8 naći unutar trokuta.

Rješenja na sljedećoj stranici

$$1. X \sim \left(\frac{1}{36} \quad \frac{2}{36} \quad \frac{3}{36} \quad \frac{4}{36} \quad \frac{5}{36} \quad \frac{6}{36} \right), E(X) = \frac{91}{36}, D(X) \approx 1.97$$

$$2. a) Z \sim \left(\frac{-3}{3} \quad \frac{-2}{2} \quad \frac{-1}{6} \right), E(Z) = -\frac{13}{6}, D(Z) = \frac{17}{36}$$

$$b) D(X) = \frac{1}{4}, D(Y) = \frac{2}{9}, D(Z) = D(2X - 3Y + 4) \stackrel{\text{nezavisne}}{=} 4D(X) + 9D(Y) = 3$$

$D(X + s) = D(X)$, tj. broj koji se zbraja sa slučajnom varijablom nestaje unutar varijance

$$3. a) E(X) = E(Y) = 0.9, E(Z) = E(X \cdot Y) \stackrel{\text{nezavisne}}{=} E(X) \cdot E(Y) = 0.81$$

b) (nema formule za disperziju umnoška slučajnih varijabli, iako su varijable nezavisne, pa prvo treba odrediti razdiobu od $Z = X \cdot Y$)

$$Z \sim \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.51 & 0.25 & 0.2 & 0.04 \end{array} \right), E(Z^2) = 1.69, D(Z) = 1.0339$$

4. binomna, $n = 8, p = 0.6$ (pogodak)

$$a) P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^5 \approx 0.12386$$

$$b) P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \approx 0.95019$$

$$5. a) P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{7}{5}}, \dots, X \sim \left(\frac{2}{7} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \right)$$

$$b) D(X) = \frac{20}{49}$$

6. Poissonova, $0.02 \cdot 200 = 4$ nejestive u smjesi;

$$\text{prosječan broj nejestivih po kolačiću: } \lambda = \frac{4}{80} = 0.05$$

$$a) P(X = 2) = \frac{0.05^2}{2!} e^{-0.05} \approx 0.001189$$

$$b) P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 0.001209$$

7. geometrijska, $p = 0.8$

$$a) P(X = 3) = 0.2^2 \cdot 0.8 = 0.032 \text{ (prva dva kolačića nemaju grožđicu i treći ima)}$$

$$b) P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) = 0.04 \text{ (brže riješimo zadatak ako primijetimo da c) zadatak upućuje na isto)}$$

$$c) 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

$$d) E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

$$8. X \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \end{array} \right), E(X) = 3.125$$

9. Poissonova,

$$E(X) = \lambda = 180 \text{ (prosječno) poruka po satu} = \frac{180}{60} = 3 \text{ poruke po minuti}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \approx 0.352768$$

$$10. a) X \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{array} \right), \quad b) E(X) = \frac{7}{3}$$

$$11. \text{ binomna, } n = 10, p = \frac{9}{4\pi\sqrt{3}} \left(= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)$$

(p dobijemo na isti način kao u sličnom zadatku sa vježbi)

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0.0154478$$