



**ALGEBRA
BERNAYS**

SVEUČILIŠTE

**MATEMATIČKA
ANALIZA**

**Neodređeni
integral**

Antiderivacija

Antideriviranje je postupak suprotan deriviranju.

Za zadanu funkciju $f(x)$, tražimo funkciju $F(x)$ koju trebamo derivirati kako bi dobili zadanu funkciju.

Koju funkciju treba derivirati kako bi dobili

$$f(x) = 2x + 1?$$

Trebamo derivirati funkciju

$$F(x) = x^2 + x$$

Antiderivacija

Pokušajmo prepoznati uzorak koji se pojavljuje u tom procesu prilikom određivanja antiderivacije za potencije.

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Antiderivacija

Time smo zapravo odredili pravilo za antiderivaciju (skoro svake) potencije:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Provjerimo dobiveno pravilo i odredimo $F'(x)$:

$$F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{(n+1) \cdot x^n}{n+1} = x^n$$

Antiderivacija

Sada možemo lako odrediti antiderivaciju funkcije

$$f(x) = x^9$$

$$F(x) = \frac{x^{10}}{10}$$

No, je li to jedino rješenje?

$$F(x) = \frac{x^{10}}{10} + 1, \quad F(x) = \frac{x^{10}}{10} - \pi, \quad F(x) = \frac{x^{10}}{10} + 5$$

Primitivna funkcija

Neka je f neprekidna funkcija na $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

zove se primitivna funkcija.

Neka je F primitivna funkcija funkcije f na $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada je i $F + c$ primitivna funkcija funkcije f na I za svaki $c \in \mathbb{R}$.

Sve primitivne funkcije od f su oblika $F + c, c \in \mathbb{R}$.

Neodređeni integral

Skup svih primitivnih funkcija f zove se neodređeni integral funkcije f i pišemo:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

- $f(x)$ je podintegralna funkcija
- dx određuje varijablu po kojoj se integrira
- $F(x)$ je primitivna funkcija funkcije $f(x)$
- $c \in \mathbb{R}$ je konstanta integracije

Neodređeni integral

Do sada smo upoznali tek jedno pravilo za integriranje, pravilo za potencije:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

No, to nam pravilo omogućava integriranje velikog broja funkcija!

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$a) \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$b) \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$c) \int \frac{1}{x^5} \, dx = \int x^{-5} \, dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$$

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$d) \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$e) \int \sqrt[4]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{4}} \, dx = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + c$$

$$f) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx = \int x^{-\frac{2}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3 \sqrt[3]{x} + c$$

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$g) \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} + c \quad ???$$

Primjer $g)$ je izuzetak od pravila za potencije!

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

Primjer 1. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$h) \int 2 \, dx = 2x + c$$

$$i) \int \frac{dx}{5} = \frac{1}{5}x + c$$

$$j) \int 3 \, dt = 3t + c$$

Tablica neodređenih integrala

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

Svojstva neodređenih integrala

$$1. \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

$$2. \int (f'(x)) dx = f(x) + c$$

$$3. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$4. \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \quad a \in \mathbb{R}$$

Metode integriranja

Za razliku od deriviranja, kod integriranja ne postoje pravila za sve moguće oblike podintegralne funkcije.

Zato pravila nadopunjujemo **metodama**:

1. Metoda neposredne integracije
2. Metoda supstitucije (ili zamjene)
3. Metoda parcijalne integracije

Neposredna integracija

Metoda neposredne integracije:

- neposredna primjena tabličnih integrala

$$\int (2x^2 - 3 \sin x) dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cos x + c$$

- modifikacija podintegralne funkcije kako bi upotrijebili tablične integrale

$$\int (x - 2)^2 dx = \int (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + c$$

Primjer 2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$a) \int (3 \cos x - 4^x) dx = 3 \sin x - \frac{4^x}{\ln 4} + c$$

$$b) \int \left(\frac{3}{x} - x + 2 \right) dx = 3 \ln x - \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

$$c) \int \left(\frac{3}{2 \sin^2 x} + \frac{e^x}{4} \right) dx = -\frac{3}{2} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{4} e^x + c$$

Primjer 2. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$\begin{aligned} d) \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$e) \int (2^x \cdot 3^x) dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + c$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$\begin{aligned} a) \int x^2 \cdot (2x - 1) dx &= \int (2x^3 - x^2) dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int (\sqrt{x} - 3)^2 dx &= \int (x - 6\sqrt{x} + 9) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 6 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 9x + c = \frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x^3} + 9x + c \end{aligned}$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$c) \int \left(2^{-x} - \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \int \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x - x^{-2} + 1 \right) dx$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x}{\ln \frac{1}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} + x + c = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{x} + x + c$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$\begin{aligned} d) \int \left(\frac{x + xe^x - 2}{x} \right) dx &= \int \left(\frac{x}{x} + \frac{xe^x}{x} - \frac{2}{x} \right) dx \\ &= \int \left(1 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = x + e^x - 2 \ln |x| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \int \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2} \right) dx &= \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \int \left(1 - \frac{3}{x} + x^{-2} \right) dx = x - 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

Primjer 3. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$\begin{aligned} f) \int \left(\frac{6^x + 8^x}{2^x} \right) dx &= \int \left(\frac{6^x}{2^x} + \frac{8^x}{2^x} \right) dx \\ &= \int (3^x + 4^x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \int \left(\frac{5^x - 3^x + 1}{3^x} \right) dx &= \int \left(\frac{5^x}{3^x} - \frac{3^x}{3^x} + \frac{1}{3^x} \right) dx \\ &= \int \left(\left(\frac{5}{3} \right)^x - 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^x \right) dx = \frac{\left(\frac{5}{3} \right)^x}{\ln \frac{5}{3}} - x + \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + c \end{aligned}$$

Primjer 4. Odredite sljedeće neodređene integrale:

$$a) \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$c) \int ax da = \frac{a^2}{2} \cdot x + c$$

$$b) \int ax dx = a \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

$$d) \int ax dy = ax \cdot y + c$$

Video materijali

1. Tablični integrali:

<https://www.youtube.com/watch?v=fBIpSP1AWys&list=PLcWN1hq0ODxmpoallVtmms7QbDnVaGYZw&index=2>

<https://www.youtube.com/watch?v=NFvtNe6o0Y8&list=PLcWN1hq0ODxmpoallVtmms7QbDnVaGYZw&index=3>

2. Pravila integriranja:

<https://www.youtube.com/watch?v=c8I9tBISxUI&list=PLcWN1hq0ODxmpoallVtmms7QbDnVaGYZw&index=4>

Video materijali

3. Neposredna integracija:

<https://www.youtube.com/watch?v=fbphFtezwsA&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=2>

https://www.youtube.com/watch?v=uRalum27k_g&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=3

Hvala 😊