



**ALGEBRA
BERNAYS**
SVEUČILIŠTE

**MATEMATIČKA
ANALIZA**

**Integrali u
ekonomiji**

Ekonomске funkcije

Prisjetimo se.

Ukoliko je funkcija $T(Q)$ funkcija ukupnih troškova (gdje je Q količina), tada možemo definirati slijedeće ekonomske funkcije:

- funkcija prosječnih troškova, $AT(Q) = \frac{T(Q)}{Q}$
- funkcija graničnih troškova, $MT(Q) = T'(Q)$

Granični troškovi

Kako se granični troškovi dobivaju deriviranjem funkcije ukupnih troškova, $MT(Q) = T'(Q)$, slijedi:

$$T(Q) = \int MT(Q) dQ$$

No, rješenje neodređenog integrala je klasa funkcija koje se međusobno razlikuju u vrijednosti neodređene konstante integriranja, c .

Stoga nam je za određivanje funkcije ukupnih troškova potreban još jedan dodatni podatak.

Granični troškovi

$$T(Q) = \int MT(Q) dQ$$

Često se kao dodatni podatak, zadaje vrijednost ukupnih troškova na razini proizvodnje $Q = 0$, odnosno $T(0)$.

Tu veličinu nazivamo i **fiksni troškovima**.

Radi se o troškovima tzv. „hladnog pogona“, odnosno troškovima koji postoje i bez proizvodnje.

Zadatak 1.

Odredite funkciju ukupnih troškova ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi jednaki 100.

$$\begin{aligned} T(Q) &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2} \right) dQ = \int \left(\frac{1}{2} - 50 \cdot (Q+1)^{-2} \right) dQ \\ &= \frac{Q}{2} - 50 \cdot \frac{(Q+1)^{-1}}{-1} + c = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + c \end{aligned}$$

Zadatak 1.

Odredite funkciju ukupnih troškova ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi jednaki 100.

$$T(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + c$$

$$T(0) = 100$$

$$100 = \frac{0}{2} + \frac{50}{1} + c \quad \Rightarrow \quad c = 50$$

$$T(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + 50$$

Zadatak 2.

Odredite razinu proizvodnje Q na kojoj funkcija ukupnih troškova postiče minimum, ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi 100. Koliko iznose ti minimalni ukupni troškovi?

$$T' = 0 \quad \Rightarrow \quad MT = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2} = 0$$

$$Q = 9$$

$$T'' = MT' = \frac{100}{(Q+1)^3} \quad T''(9) = \frac{100}{1000} > 0 \quad \text{minimum!}$$

Zadatak 2.

Odredite razinu proizvodnje Q na kojoj funkcija ukupnih troškova postigne minimum, ako su granični troškovi jednaki $MT(Q) = \frac{1}{2} - \frac{50}{(Q+1)^2}$, a fiksni troškovi 100. Koliko iznose ti minimalni ukupni troškovi?

$$Q = 9$$

$$T(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{50}{Q+1} + 50$$

$$T(9) = \frac{9}{2} + \frac{50}{9+1} + 50 = 59.5$$

Koeficijent elastičnosti

$$E_{y,x} = \frac{\text{relativna promjena od } y}{\text{relativna promjena od } x}$$

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

Interpretacija: kada varijabla x raste za 1%, tada funkcija $y(x)$ raste (pada) za približno $|E_{y,x}|$ %.

Koeficijent elastičnosti

U prvom dijelu semestra određivali smo koeficijent elastičnosti $E_{y,x}$ kada nam je bila zadana funkcija $y(x)$.

Sada postavljamo obrnuto pitanje: kako odrediti funkciju $y(x)$ ako nam je zadan njen koeficijent elastičnosti $E_{y,x}$?

Odgovor: rješavanjem pripadne diferencijalne jednačbe.

Zadatak 3. Odredite funkciju potražnje u ovisnosti o cijeni, $q(p)$, ako vrijedi $E_{q,p} = p + 1$, te $q(1) = 2e$.

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \quad \int \frac{1}{q} dq = \int \left(1 + \frac{1}{p}\right) dp$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = p + 1 \quad \ln q = p + \ln p + c \quad 2e = c \cdot e^1 \cdot 1$$

$$\frac{1}{q} dq = \frac{p + 1}{p} dp \quad q = e^{p + \ln p + c} \quad c = 2$$

$$\frac{1}{q} dq = \frac{p + 1}{p} dp$$

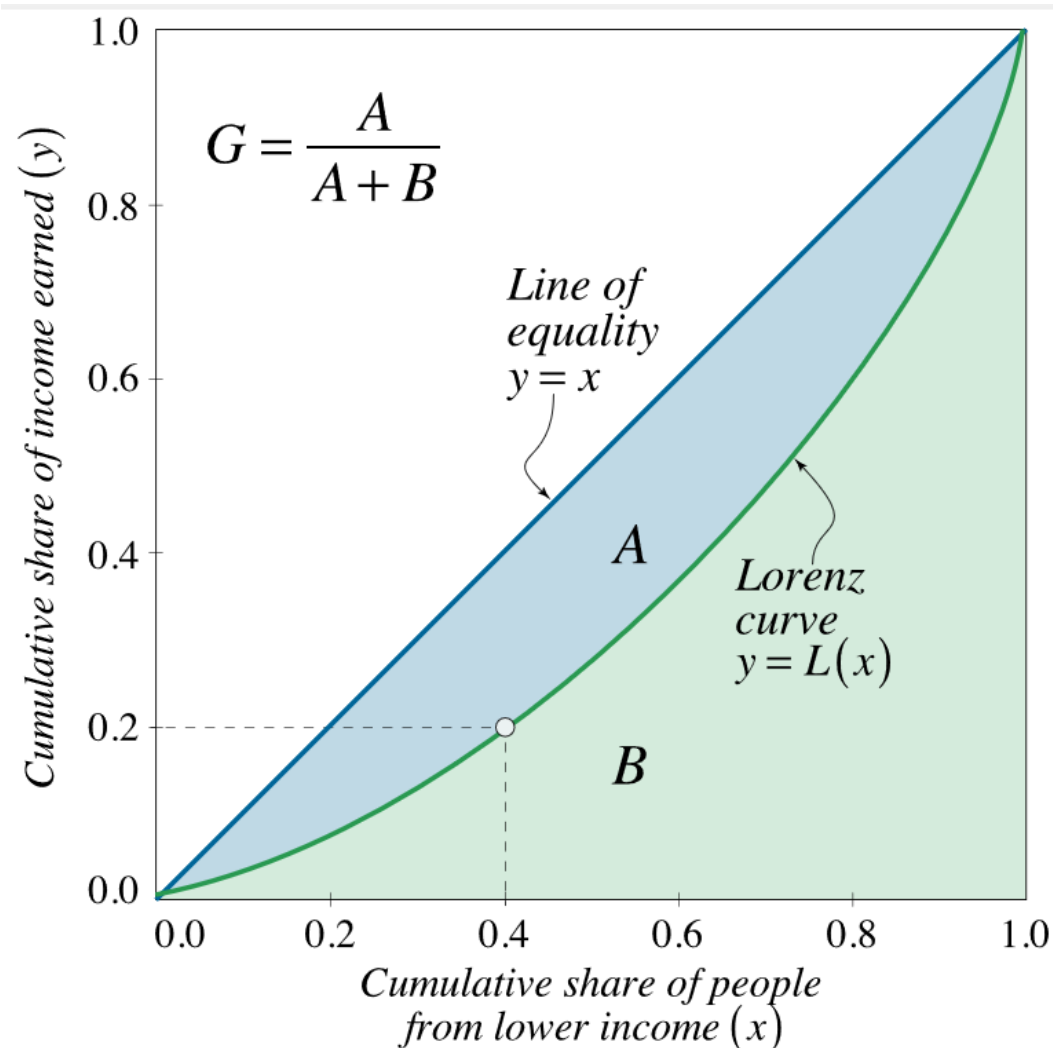
$$q = c \cdot e^p \cdot p$$

$$q = 2 \cdot e^p \cdot p$$

Lorenzova krivulja

Lorenzova krivulja je grafički prikaz nejednakosti raspodjele nekog dobra (bogatstva, prihoda, imovine...) u populaciji.

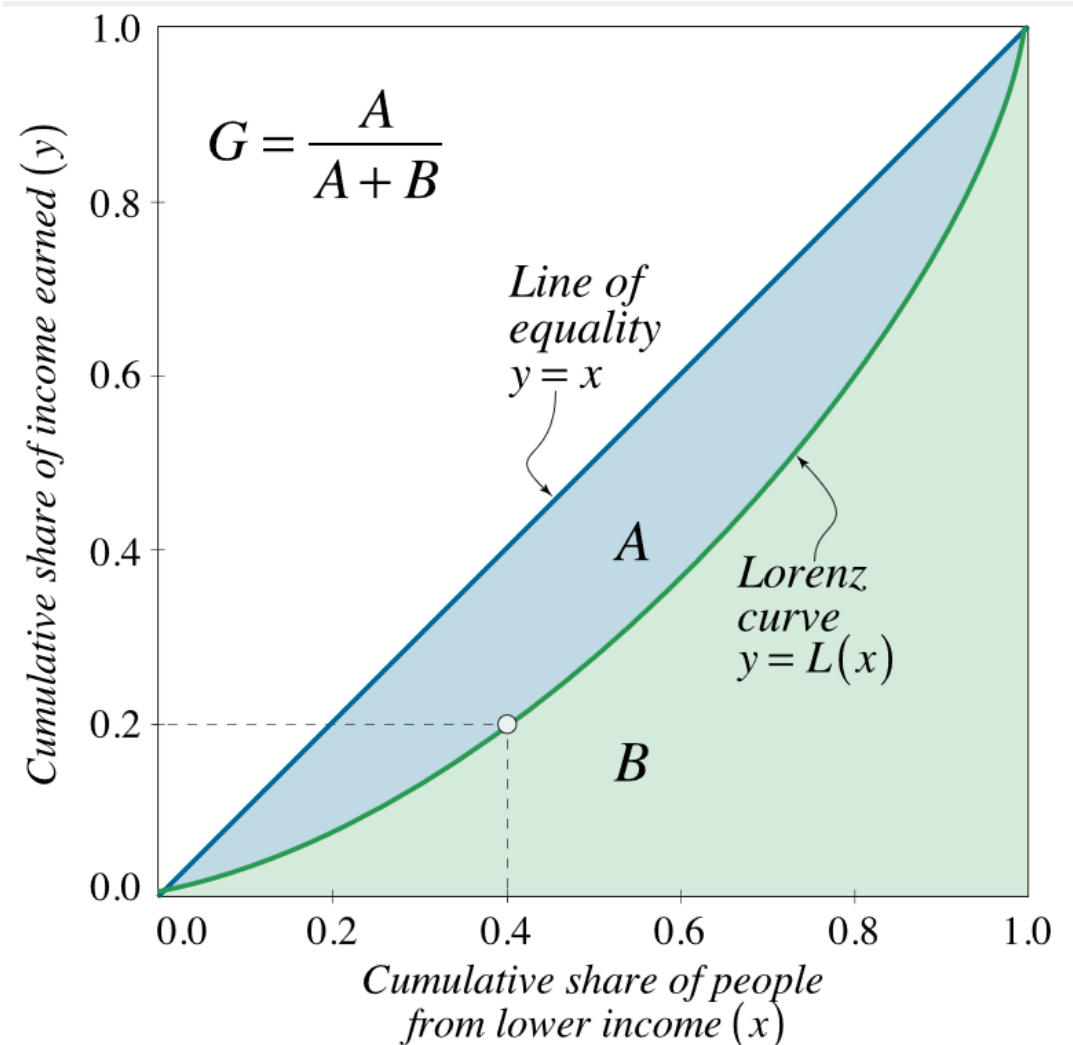
x -os: postotni udio populacije
 y -os: postotni udio ukupnog bogatstva (prihoda, itd.)



Lorenzova krivulja

Na primjer, točka na Lorenzovoj krivulji s koordinatama $(0.4, 0.2)$ govori kako 40% ukupne populacije posjeduje 20% ukupnog bogatstva.

Pravac $y = x$ predstavlja uniformnu razdiobu bogatstva, tj. potpunu jednakost.

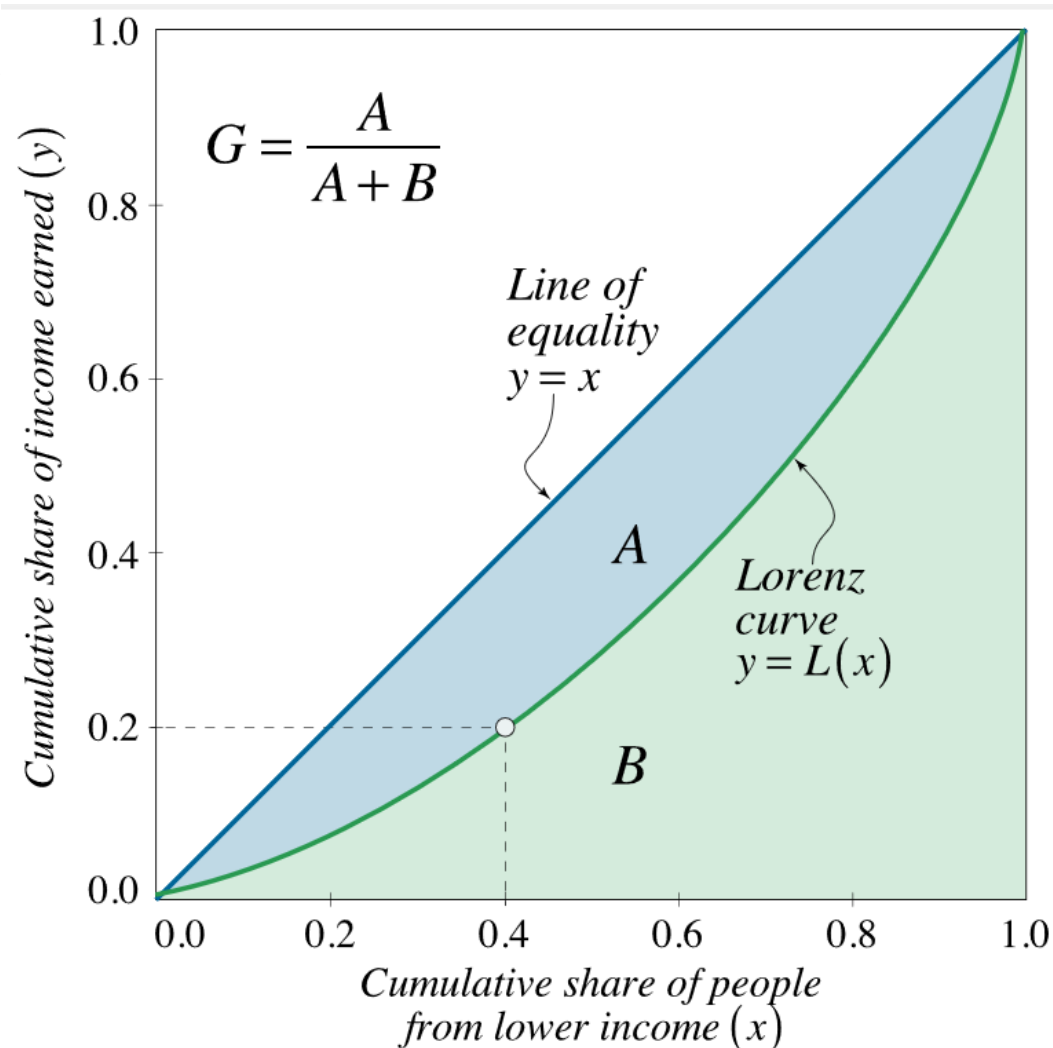


Lorenzova krivulja

Lorenzovu krivulju obilježavamo s $L(x)$.

Što je krivulja $L(x)$ konveksnija, to je nejednakost u društvu veća.

Kao mjera nejednakosti koju prikazuje Lorenzova krivulja koristi se Ginijev koeficijent.

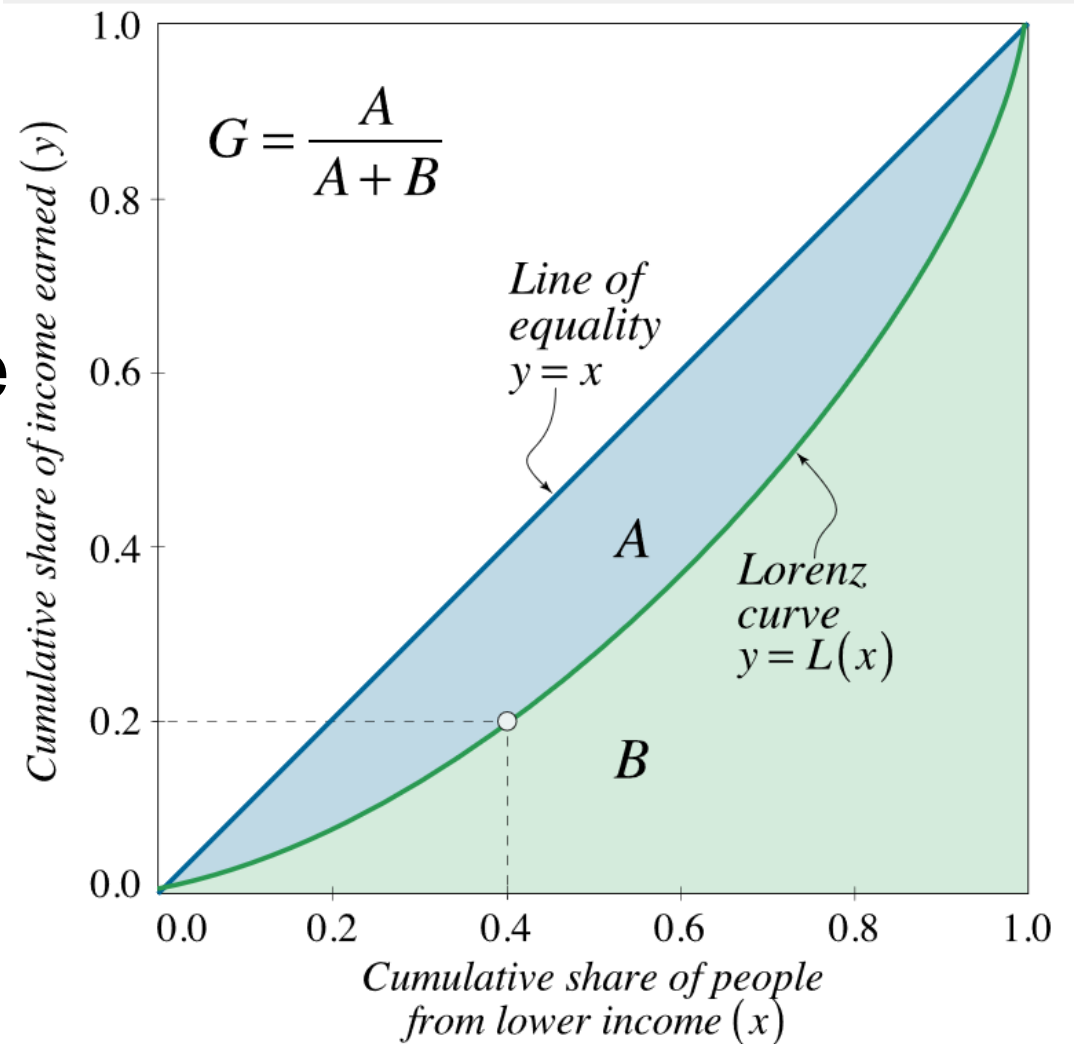


Ginijev koeficijent

Ginijev koeficijent je definiran kao omjer površine između Lorenzove krivulje i linije jednakosti (A) i ukupne površine ispod linije jednakosti (A+B).

$$G = \frac{A}{A+B} = \frac{\int_0^1 (x - L(x)) dx}{\int_0^1 x dx}$$

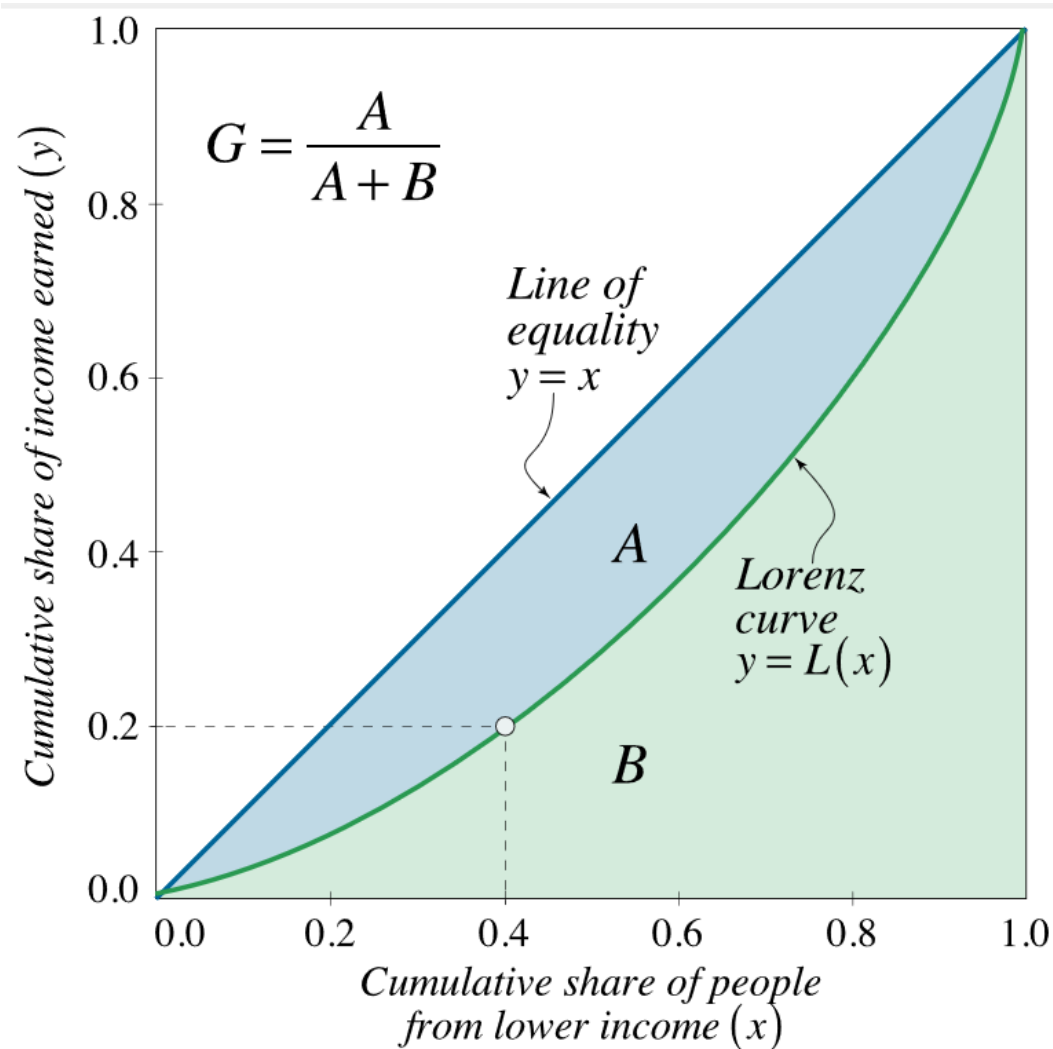
$$G = 2 \int_0^1 (x - L(x)) dx$$



Ginijev koeficijent

Ginijev koeficijent je je relativna mjera nejednakosti.

Poprima vrijednosti od 0 ili 0% (potpuna jednakost) do 1 ili 100% (potpuna nejednakost)



Zadatak 4. Lorenzova krivulja nekog društva dana je s $L(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$. Odredite Ginijev koeficijent za takvu distribuciju bogatstva.

$$\begin{aligned} G &= 2 \int_0^1 (x - L(x)) \, dx = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}x \right) \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 \right) \, dx = 2 \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{20}x^4 - \frac{1}{15}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20} - \frac{1}{15} \right) = \frac{11}{30} \approx 0.37 \end{aligned}$$

Ginijev koeficijent

Primjeri Ginijevog koeficijenta prihoda kućanstva prema procjeni Svjetske banke (izvor).

Slovenija: $G = 25.4$

Velika Britanija: $G = 33.2$

Finska: $G = 27.1$

Rusija: $G = 37.7$

Švedska: $G = 29.2$

Srbija: $G = 39.6$

Austrija: $G = 30.5$

SAD: $G = 41.5$

Hrvatska: $G = 31.1$

JAR: $G = 63.0$

Video materijali

Koeficijent elastičnosti:

- https://www.youtube.com/watch?v=W0CLmAQ85Wo&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=7
- https://www.youtube.com/watch?v=zTJ-9Z2LzA&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=8
- https://www.youtube.com/watch?v=RmA0IACqKmU&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=9

Video materijali

Granična funkcija:

- https://www.youtube.com/watch?v=TRNrT8aKi8s&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=10
- https://www.youtube.com/watch?v=rT5UozoXMBg&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=11

Hvala 😊