Vježbe 01

1. listopada 2025. 11:29

KOMBINATORIKA - prebrojavanje

1. Iz Zagreba prema sjeveru vode 3 ceste, prema zapadu 2 ceste, a prema jugu 1 cesta. Na koliko načina se može cestom izaći iz Zagreba?

PRAVILO SUME: biram 1 cestu na S ILI Z ILI J

3 + 2 + 1 = 6 načina

Pravilo zbroja: Neka skupovi $S_1, S_2, \ldots S_k$ imaju redom $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elemenata. Ako su ti skupovi takvi da nikoja dva nemaju zajedničkih elemenata (tj. disjunktni su), tada je ukupan broj načina za odabrati 1 element iz skupa S_1 **ILI** iz skupa S_2 **ILI** … **ILI** iz skupa S_k jednak

$$\boldsymbol{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}.$$

2. U restoranu za ručak nude 3 vrste juhe, 4 vrste glavnih jela i 2 vrste salate. Koliko različitih ručaka koji se sastoje od 1 juhe, 1 glavnog jela i 1 salate možemo naručiti?

biramo 1j I 1g I 1s

broj načina (nizova) 3 · 4 · 2

= 24 načina (ručkova)

$j_1 g_1 s_1$

$j_1 g_1 s_2$

$j_1 g_2 s_1$ ...

Pravilo uzastopnog prebrojavanja (pravilo umnoška): Neka skupovi S_1, $S_2, \ldots S_k$ imaju redom $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elemenata. Ako se element s_1 može odabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina **I** nakon toga (bez obzira koji je element već odabran) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina **I** … **I** element s_k iz skupa S_k na n_k načina, tada je ukupan broj nizova $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jednak

$$\boldsymbol{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k}.$$

Ovdje skupovi mogu imati zajedničke elemente, štoviše, svi mogu biti isti.

Također, može se primijetiti da ovdje biramo po jedan element iz svakog skupa.

3. Na koliko načina između 5 Talijanki, 2 Francuskinje, 7 Čehinja i 3 Mađarice možemo odabrati:
   a) jednu osobu,
   b) po jednu Talijanku, Francuskinju, Čehinju i Mađaricu,
   c) 17 osoba?

a) biramo 1T ILI 1F ILI 1Č ILI 1M

5 + 2 + 7 + 3 = 17 načina

b) biramo po 1

1T	I	1F	I	1Č	I	1M	
5	·	2	·	7	·	3	= 210

c) svih 17 mogu odabrati na 1 način

4. Na polici imamo 20 knjiga iz programiranja, 14 knjiga iz matematike i 15 ostalih. Na koliko načina možemo odabrati:
   a) jednu knjigu s police,
   b) po jednu knjigu iz svake grupe?

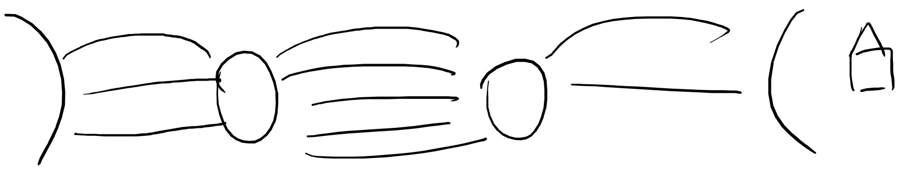
a) 1P ili 1M ili 1O

$20 + 14 + 15 = 49$ načina

b) 1P I 1M I 1O → NIZOVI

$20 \cdot 14 \cdot 15 = 4200$ načina (nizove)

5. Stanovnici Konisberga kreću iz lijevog dijela grada i trebaju prijeći dva otoka do desnog dijela grada u kojem se nalazi slastičarna. Lijevu obalu i prvi otok povezuju 3 mosta, prvi i drugi otok povezuje 5 mostova, a drugi otok i desnu obalu 2 mosta. Na koliko različitih načina mogu doći do slastičarne?



biramo po 1 od svake skupine mostova:

$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ načina

Sada slažemo nizove birajući na svako mjesto iz istog skupa...!!

6. Jedan test ima 20 pitanja na koje se odgovara s „da” ili „ne”.
   a) Koliko ima različitih mogućnosti popunjavanja tog testa?
   b) Ispišite sve mogućnosti ako test ima samo 3 pitanja.

1. koliko je dugačak niz?
2. Na koliko načina

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{20}$

$\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdots \underline{2} = 2^{20}$

1. 2. ... 20. mjesto

{DA, NE} {DA, NE}

$= 1\,048\,576$

2. Na koliko načina mogu popuniti svako mjesto u nizu?

7. Sportska prognoza ima 12 redaka. U svaki redak treba upisati: 0 - neriješeno, 1 – pobjeda domaćina ili 2 – pobjeda gosta. Na koliko se različitih načina može ispuniti sportska prognoza?

načina načina

$\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdots \underline{3} = 3^{12}$

1. 2. 3. 12. redak

{0,1,2} {0,1,2} ...

$= 531\,441$

8. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva?

znamenaka

$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 9000$

1. 2. 3. 4.

$\cancel{0}$

0 ne ide na 1. mj.

9. Koliko ima troznamenkastih brojeva u sustavu s bazom 3?

{0,1,2}

$\underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 18$

$\cancel{0}$ {0,1,2} {0,1,2}

{1,2}

10. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji su:
   a) djeljivi s 5,
   b) djeljivi s 2,
   c) djeljivi s 4?

broj načina za popuniti mjesto

broj načina za popuniti mjesto

a) $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{2} = 18000$

$\cancel{0}$ $\quad \underbrace{\{0,1,\dots,9\}}_{10 \text{ znam.}}$ $\quad \underbrace{\{0,5\}}$ za djeljivo s 5

b) $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{5} = 45000$

$\cancel{0}$ $\quad \{0,2,4,6,8\}$

c) djeljivi sa 4 → svaki drugi od onih djeljivih sa 2

$45000 : 2 = 22500$

2. način: djeljiv s 4 je broj kojem je dvoznamenkasti završetak (ne svaki broj posebno) djeljiv sa 4!

$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{25} = 22500$

1. 2. 3. 4. i 5. kao dvozn. broj

$\cancel{0}$

koliko ima dvozn. završetaka djeljivih sa 4?

00
04 = 4·1
08 = 4·2
12 = 4·3
16 = 4·4
⋮
96 = 4·24

ima ih 96 : 4 = 24

ukupno $\underline{\underline{25}}$ (sa 00)

PRAVILO SUME i PRAVILO UMNOŠKA

11. Koliko ima prirodnih brojeva <u>manjih</u> od 10 000 kojima su sve znamenke parni brojevi?

to mogu biti četveroznam.,

$\underline{4} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$

$\cancel{0}$

znamenke parne $\{0,2,4,6,8\}$

1. koliko je dugačak niz?
2. Na koliko načina mogu popuniti svako mjesto u nizu?

parne

četveroznam, $\underline{4} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$ $\{0,2,4,6,8\}$. mogu popuniti svako mjesto u nizu?

$\cancel{0}$

ILI +

troznam. $\underline{4} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$

$\cancel{0}$

prirodni brojevi $= \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$

$\cancel{0}$

ILI +

dvoznam $\underline{4} \cdot \underline{5}$

$\cancel{0}$

ILI +

jednoznamenkasti brojevi $\underline{4}$

$\cancel{0}$

Rješ: $\underline{\underline{624}}$

2. način

dopuštamo 0

$\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} - 1 = 624$

(ne može 0000) zbog prirodnog

12. Registarska tablica automobila se sastoji od oznake mjesta, tri ili četiri znamenke i jednog ili dva slova (osim znakova: č, ć, đ, š, ž, dž, lj, nj). Koliko se različitih tablica može napraviti za jedno mjesto?

30 slova − 8 = 22 slova

3z I 1s ILI 3z I 2s ILI 4z I 1s ILI 4z I 2s

$\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{22} + \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{22} \cdot \underline{22} + 10^4 \cdot 22 + 10^4 \cdot \underline{22} \cdot \underline{22}$

$= 5\,566\,000$

2. način

...čina

2. način

$$\underset{\downarrow}{\underline{11}} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}}_{\text{znam.}} \quad \overset{\text{načina}}{\underline{23}} \cdot \underline{22} = 5\,566\,000$$

10 zn ili prazno

slovo
22 + prazno

13. Koliko ima različitih peteroznamenkastih brojeva koji:

a) ne sadrže znamenku 1,

b) sadrže točno jednu znamenku 1,

c) sadrže barem jednu znamenku 1,

d) sadrže barem dvije znamenke 1?

bez 1

načina od 10 znam.

a) $\underline{8} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 52\,488$

1. ... 5.

b) točno 1 jedinice = MORA na slučajeve

jedinica na 1. mj.

$\underset{\{1\}}{\overset{\text{način}}{\underline{1}}} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9}$

+

jedinica na 2. mj.

$\underline{8} \cdot \underset{\{1\}}{\underline{1}} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9}$

+

jedinica na 3. mj.

$8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9$

+

jedinica na 4. mj.

$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 9$

+

jedinica na 5. mj.

$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1$

JEDINICA na 1. mj.

9^4

+

jedinica nije na 1. mj.

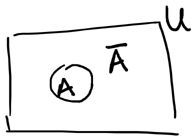
$4 \cdot 8 \cdot 9^3$

$= 29\,889$

$+ \quad 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1$

c) barem jedna znam. 1 = 1 ili 2 ili 3 ili 4 ili 5 jedinica

PRAVILO KOMPLEMENTA (suprotnog) ⇒ broj elemenata jednog skupa = ukupan broj elemenata − broj elemenata suprotnog skupa



$$c(A) = c(U) - c(\bar{A})$$

$$\text{suprotno od } \underbrace{\text{barem jedne}}_{A} \text{ jedinice je } \underbrace{\text{NITI jedne jedinice}}_{\bar{A}}$$

$$c(A) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - \overset{a)}{8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}$$

$\cancel{0}$

$= 37\,512$

suprotno:

d) barem dvije jedinice = svi − 1 jedinica − 0 jedinica

2 ili više

1 ili 0

jedinica može biti

0 ili 1 ili $\underbrace{2 \text{ ili } 3 \text{ ili } 4 \text{ ili } 5}_{\text{barem dvije}}$

$$= 90000 - \overset{b)}{29889} - \overset{a)}{52488}$$

$= 7\,623$