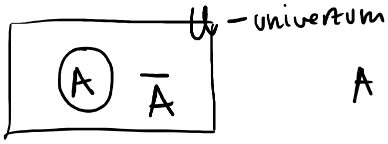
Vježbe 2

8. listopada 2025. 11:34

PRAVILO KOMPLEMENTA



A – zanima nas broj njegovih elemenata

Ā – suprotni/komplement od A

broj elemenata

$$\boxed{c(A) = c(U) - c(\bar{A})}$$

14. Koliko ima nizova duljine 7 sastavljenih od 0 i 1 sa:
    a) barem 2 nule,
    b) najviše 6 jedinica?

nizovi – 0 može na 1. mj.

a)

$c(U) \quad - \quad c(\bar{A})$ → suprotno je 1 ili manje

barem 2 nule = ukupan broj nizova − 1 nula − niti jedna nula

2 ili više do 7

$$= \underset{\{0,1\}}{2} \cdot \underset{\{0,1\}}{2} \cdot 2 \cdot \_ \cdot \_ \cdot \_ \cdot 2 - \underbrace{7}_{}{}^{\text{ih ima}} - 1$$

0111111
1011111
110...
1110...
11110..
1111101
1111110

1111111

$$= 2^7 - 7 - 1$$

$$= 120$$

b)

najviše 6 jedinica = svi − 7 jedinica

suprotno je točno 7 jedinica

6 ili MANJE

kompliciramo pa idemo na komplement

$$= 2^7 - 1$$

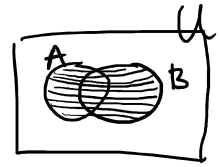
$$= 127$$

UNIJA = UDRUŽENJE

Broj elemenata unije DVA skupa: Ako su A i B konačni skupovi, tada za broj elemenata unije ta dva skupa vrijedi sljedeće:

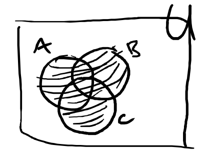
$$\underset{\text{broj el.}}{c}(A \overset{ili}{\cup} B) = c(A) + c(B) - c(A \overset{i}{\cap} B).$$

presjek = zajedničko



Broj elemenata unije TRIJU skupova:

$$c(A \overset{ili}{\cup} B \overset{ili}{\cup} C) = c(A) + c(B) + c(C) - c(A \overset{i}{\cap} B) - c(A \overset{i}{\cap} C) - c(B \overset{i}{\cap} C) + c(A \overset{i}{\cap} B \overset{i}{\cap} C).$$



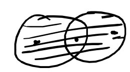
De Morganova pravila: $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ $\quad \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{A \cap B \cap C}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ $\quad \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

UNIJA → veznik ili
PRESJEK → veznik i

UNIJA

$A \overset{ili}{\cup} B$ = ili A ili B ili oboje



15. Koliko ima troznamenkastih brojeva koji:
    a) ne sadrže znamenku 3 i znamenku 7,
    b) ne sadrže znamenku 3 ili znamenku 7,
    c) sadrže barem jednu znamenku 3,
    d) sadrže barem jednu znamenku 3 ili barem jednu znamenku 7,
    e) sadrže barem jednu znamenku 3 i barem jednu znamenku 7,
    f) sadrže barem jednu od znamenaka 3, 7 ili 9?

U = { svi troznamenkasti }

A = { oni koji NE sadrže 3 }

B = { NE sadrže 7 }

a) $c(A \overset{i}{\cap} B) = \underset{\cancel{0}\,\cancel{3}\,\cancel{7}}{7} \cdot \underset{\cancel{3}\,\cancel{7}}{8} \cdot \underset{\cancel{3}\,\cancel{7}}{8} = 448$

b) $c(A \overset{ili}{\cup} B) = c(A) + c(B) - c(A \overset{i}{\cap} B)$

$= \underset{\cancel{0}\,\cancel{3}}{8} \cdot \underset{\cancel{3}}{9} \cdot \underset{\cancel{3}}{9} + \underset{\cancel{0}\,\cancel{7}}{8} \cdot \underset{\cancel{7}}{9} \cdot \underset{\cancel{7}}{9} - \overset{a)}{448}$

$= 848$

c) $\bar{A}$ = { sadrže (barem jednu) 3 } c)

$$\overline{A} = \{ \text{sadrže (barem jednu) } 3 \}$$

$$\overline{B} = \{ \text{sadrže (barem jednu) } 7 \}$$

$$c(\overline{A}) \overset{\text{pravilo}}{\underset{\text{komplementa}}{=}} c(\overset{\text{svi}}{U}) - c(A)$$

$$= \underset{\cancel{0}}{\underline{9}} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} - \underset{\cancel{0}\,\cancel{3}}{\underline{8}} \cdot \underset{\cancel{3}}{\underline{9}} \cdot \underset{\cancel{3}}{\underline{9}}$$

$$= 252$$

pravilo komplementa

$$\boxed{c(\overline{*}) = c(U) - c(*)}$$

d) sadrže barem jednu znamenku 3 ili barem jednu znamenku 7

$$c(\overline{A} \overset{\text{ili}}{\cup} \overline{B}) \overset{\text{de}}{\underset{\text{Morgan}}{=}} c(\overline{A \cap B}) \overset{\text{pravilo}}{\underset{\text{kompl.}}{=}} c(U) - c(A \overset{\text{i}}{\cap} B)$$

$$= 900 - \overset{a)}{448}$$

$$= 452$$

e) sadrže barem jednu znamenku 3 i barem jednu znamenku 7.

$$c(\overline{A} \overset{\text{i}}{\cap} \overline{B}) \overset{\text{de}}{\underset{\text{Morgan}}{=}} c(\overline{A \cup B}) \overset{\text{pravilo}}{\underset{\text{kompl.}}{=}} c(U) - c(A \cup B)$$

$$= 900 - \overset{b)}{848}$$

$$= 52$$

f) sadrže barem jednu od znamenaka 3, 7 ili 9?

$$c(\overline{A} \overset{\text{ili}}{\cup} \overline{B} \overset{\text{ili}}{\cup} \overset{\text{sadrži 9}}{\overline{C}})$$

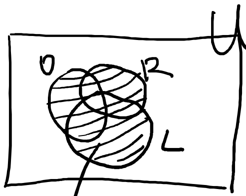
$C = \{\text{NEMA } 9\}$

$$\overset{\text{de}}{\underset{\text{Morgan}}{=}} c(\overline{A \cap B \cap C}) \overset{\text{kompl.}}{=} c(U) - c(\overset{\text{bez 3}}{A} \overset{\text{i}}{\cap} \overset{\text{bez 7}}{B} \overset{\text{i}}{\cap} \overset{\text{bez 9}}{C})$$

$$= 900 - \underset{\cancel{0}\,\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{9}}{\underline{6}} \cdot \underset{\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{9}}{\underline{7}} \cdot \underset{\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{9}}{\underline{7}}$$

$= 606$

16. U jednom gradu koji ima 40 000 stanovnika, organiziraju se u dobrotvorne svrhe razne aktivnosti. Gradonačelnik se na kraju godine pohvalio da su održani po dva koncerta i lutrija te da je više od pola građana sudjelovalo u dobrotvornim aktivnostima. Poznato je da je na koncertu ozbiljne glazbe bilo 2 000 ljudi, na rock koncertu ih je bilo 8 000, a po jedan listić lutrije kupilo je 12 000 stanovnika. Nadalje, zna se da je 500 ljudi bilo na oba koncerta, te da je lutriju kupilo 200 posjetitelja ozbiljne glazbe i 300 posjetitelja rock koncerta. Sto građana je kupilo lutriju i bilo na oba koncerta. Nitko nije kupio više od jednog listića lutrije. Je li gradonačelnik prenapuhao broj građana koji sudjeluju u dobrotvornim aktivnostima?



$U = \{\text{stanovnici grada}\}$ $\quad c(U) = 40\,000$

dobrotvorne akt.

$O \overset{\text{ili}}{\cup} R \overset{\text{ili}}{\cup} L$

$c(O) = 2000 \qquad c(O \overset{i}{\cap} R) = 500$

$c(R) = 8000 \qquad c(O \overset{i}{\cap} L) = 200 \qquad c(O \overset{i}{\cap} R \overset{i}{\cap} L) = 100$

$c(L) = 12\,000 \qquad c(L \overset{i}{\cap} R) = 300$

$$c(O \cup R \cup L) \overset{\text{formula}}{=} c(O) + c(R) + c(L) - c(O \overset{i}{\cap} R) - c(O \overset{i}{\cap} L) - c(R \overset{i}{\cap} L) + c(O \overset{i}{\cap} R \overset{i}{\cap} L)$$

$$= 2000 + 8000 + 12000 - 500 - 200 - 300 + 100$$

$= 21\,100$ je preko pola građana $(20\,000)$

→ NIJE PRENAPUHAO

Varijacije

Neka je dano n različitih elemenata. Ako sastavljamo nizove duljine k s ovim elementima, onda se ti nizovi nazivaju **varijacijama**.

Ako se elementi mogu ponavljati u nizu, tada je **ukupan broj varijacija** jednak

$$\underset{1.}{\underline{n}} \cdot \underset{2.}{\underline{n}} \cdot \underset{3.}{\underline{n}} \cdots \underset{k\text{-to mjesto}}{\underline{n}} = n^k .$$

Ako se elementi ne mogu ponavljati (tada mora vrijediti $k \le n$), tada je **ukupan broj varijacija** jednak

$$\underset{1.}{\underline{n}} \cdot \underset{2.}{\underline{(n-1)}} \cdot \underset{3.}{\underline{(n-2)}} \cdots \underset{k\text{-to mjesto}}{\underline{(n-k+1)}} .$$

U rješavanju zadataka držat ćemo se i dalje pravila umnoška, a ne ovih formula, jer je jednostavnije tako razmišljati. Na kraju se svede na isto.

Također, da naglasimo, **bitan je redoslijed elemenata u nizu**!!!

npr. $S = \{a, b, c\} \to$ 3 elem. $= n$

radimo nizove duljine $2 = k$

a) mogu se ponavljati elem. $\quad \underset{1.}{\underline{3}} \cdot \underset{2.}{\underline{3}} = 9$ nizova

ab ac aa
bc cb bb
ca ba cc

b) ne smiju se ponavljati $\quad \underset{1.}{\underline{3}} \cdot \underset{2.}{\underline{2}} = 6$ nizova (mogućnosti)

ab ba (*)
ac ca
cb bc

17. Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke neparni brojevi ako:

a) među znamenkama može biti i jednakih,

b) su sve znamenke različite?

a) $\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 5^3 = 125$ $\quad \{1,3,5,7,9\}$ $\quad \leftarrow$ neparni $= \{1,3,5,7,9\}$

b) $\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60$ (bez prvog, bez prva dva)

18. Koliko se različitih ~~riječi~~ nizova od 3, 4 ili 5 slova može napraviti od slova engleske abecede ako:

18. Koliko se različitih ~~riječi~~ nizova od 3, 4 ili 5 slova može napraviti od slova engleske abecede ako:

a) su sva slova različita,

b) se slova mogu ponavljati?

eng. abeceda → 26 slova

a) $\underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{24}$ ili $+$ $\underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{24} \cdot \underline{23}$ ili $+$ $\underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{24} \cdot \underline{23} \cdot \underline{22}$

$= 8\ 268\ 000$ //

b) $26 \cdot 26 \cdot 26 + 26^4 + 26^5$

$= 12\ 355\ 928$ //

19. Na natjecanju u slalomu nastupa 50 natjecatelja. Na koliko načina se mogu poredati prva trojica?

$\underline{50} \cdot \underline{49} \cdot \underline{48} = 117\ 600$

nema ponavljanja

20. Koliki je ukupan broj igara u prvenstvu u kojem sudjeluje 18 ekipa, ako svatko igra sa svakim i to dva puta tijekom prvenstva?

nema ponavljanja jer ne igra sa samim sobom

$\underline{18} \cdot \underline{17} = 306$ //

1. 2. ekipa = 1 igra

u ovom umnošku već je uračunato ab i ba, tj. svako sa svakim 2 puta je uračunato već, vidi primjer (*)

21. Koliko šifri može imati lokot koji ima 5 koluta s po 10 znamenki?

ima ponavlj.

$\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 100\ 000$

1. ... 5. kolut

! 22. Na koliko načina može 6 osoba sjesti na po jedan od 8 stolaca? !

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}$ → [illegible]

$\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \cancel{\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}}$ ___ ___ → ne smije biti praznih mjesta u nizu !!!

1. 2. . . . 8. stol.

ne može biti $k > n$
dužina niza ↓ broj elem. ↓

$\underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3}$ ✓

1. 2. 3. 4. 5. 6. zbor

stolice pridružujemo ljudima

PERMUTACIJE

– od svih n elemenata radimo nizove → permutacije

– znači i niz je duljine n

bez ponavljanja

imamo ih: $\underset{1.}{\underline{n}} \cdot \underset{2.}{\underline{(n-1)}} \cdot \underline{(n-2)} \cdots \underset{n\text{-to}}{\underline{1}} = n!$

$\boxed{0! = 1}$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

⋮

n različitih elemenata se može rasporediti na $n!$ načina.

24. Ispišite sve nizove od 4 člana koje možemo dobiti od jedne crvene, jedne bijele, jedne plave i jedne žute kuglice.

nema ponavlj. jer imamo po 1

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 4! = 24$ niza

To su:

CBPŽ BCPŽ P... Ž...
CBŽP BCŽP
CŽBP
CŽPB
CPBŽ

CŽBP
CŽPB
CPŽB
CPBŽ

23. Koliko se različitih nizova od 2 člana može napraviti od jedne crvene, jedne bijele, jedne plave i jedne žute kuglice i koji su to nizovi?

$\underline{4} \cdot \underline{3} = 12$

CB BC PC ŽP
CP BP PB ŽB
CŽ BŽ PŽ ŽC