Vježbe 03
15. listopada 2025. 11:27

PERMUTACIJE

25. Na koliko načina može 6 ljudi stati u red?

na $6!$ načina
$= 720$

n različitih elemenata možemo rasporediti na n! načina !

26. Prva hrvatska nogometna liga broji 16 klubova. Koliko različitih plasmana možemo dobiti na kraju prvenstva?
27. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke međusobno različite i neparne?

26. $16! = 20\,922\,789\,888\,000$

27. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ bez 1. jer su različite
$\{1,3,5,7,9\}$

PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

aaaabbb → 7 elemenata

Na koliko načina njih možemo rasporediti?

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!}$$

Ako se elementi ponavljaju, tj. ako među elementima ima k različitih takvih da se prvi element pojavljuje n_1 puta, drugi n_2 puta,… i k-ti element se pojavljuje n_k puta, tada je **ukupan broj permutacija** jednak

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}}$$

28. Koliko se različitih nizova može sastaviti od 2 nule i 3 jedinice?

00111
ukupno 5

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 10$$

to su: 00111, 01011, 01101, 01110, 10110, 11010, 11100, to su: 00111, 01011, 01101, 01110, 10110, 11010, 11100, 10011, 11001, 10101

29. Koliko se osmeroznamenkastih brojeva može napraviti od znamenaka broja 62774277?

6 → ima ih 1

2 → imamo 2

7 → –॥– 4

4 → imamo 1

8 uk.

$$\frac{8!}{2!\cdot 4!} = \dots$$

30. Koliko se različitih deveteroslovnih riječi može sastaviti od slova riječi UMPALUMPA?

U → 2 puta

M → 2 puta

P → 2

A → 2

L → 1

9 ukupno

$$\frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \dots$$

31. U natjecanju u skijanju sudjeluje 6 predstavnika Austrije, 5 Norveške, 3 Francuske, 1 Hrvatske i 2 Slovenije. Koliko ima različitih poredaka na kraju natjecanja ako su dva poretka jednaka ukoliko natjecatelji iz iste države osvoje ista mjesta?

$A_1 A_2 N_1$

isto kao

$A_2 A_1 N_1$

A → 6 puta

N → 5 puta

F → 3 puta

H → 1

S → 2 puta

17 uk.

$$\frac{17!}{6!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 2!} = \dots$$

Kombinacije

Neka je dan skup od n različitih elemenata. Svaki podskup od k različitih elemenata naziva se **kombinacija**. Drugim riječima, govorimo o načinima na koje možemo odabrati k elemenata iz skupa od n elemenata, pri čemu **redoslijed odabranih elemenata nije bitan**.

Broj ovakvih kombinacija (tj. broj podskupova veličine k ili možemo reći broj načina za odabrati k elemenata) jednak je

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Ovaj se broj označava $\binom{n}{k}$ te se zove binomni koeficijent (izgovaramo 'n povrh k').

Neka svojstva: 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ -> koristimo ovo svojstvo kad je donji broj veći od polovice gornjeg, tj. kada vrijedi $k > \frac{n}{2}$

2) $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{n} = 1$

3) $\binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{n-1} = n.$

32. Ispišite sve dvočlane podskupove skupa koji se sastoji od jedne crvene, jedne bijele, jedne plave i jedne žute kuglice.

$\boxed{\text{1 podskup = 1 kombinacije}}$ $\boxed{\text{poredak nije bitan}}$

$\underbrace{1c,\ 1b,\ 1p,\ 1ž}_{4}$ → podskupovi od 2 elementa

! {c,b} isto kao {b,c} !

$\{c,b\}$ $\{b,p\}$ $\{p,ž\}$
$\{c,p\}$ $\{b,ž\}$
$\{c,ž\}$

→ ima ih $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2!} \overset{\text{najbrže}}{=} \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 1} = 6$

33. Koliko ima:

a) tročlanih podskupova skupa od 8 elemenata,

b) peteročlanih podskupova skupa od 7 elemenata?

a) 8 el. → biramo 3

ima ih $\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 56$

b) $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!} = \frac{7\cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} = 21$

Neka svojstva: 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ -> koristimo ovo svojstvo kad je donji broj veći od polovice gornjeg, tj. kada vrijedi $k > \frac{n}{2}$

→ želimo dolje što manji broj

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}$$

→ ovo broji nizove od 3 elementa skupa od 8 elemenata

→ ovo je broj poredaka svaka tri elementa

Ukupno: dijelimo s brojem poredaka jer nam poredak nije važan

34. U Hrvatskoj postoje dva lota: Loto 6 od 45 i Loto 7 od 39. Koje loto se više isplati igrati?

$$\binom{45}{6} = \frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40}{6!} = \frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\ 145\ 060$$

$$\binom{39}{7} = \quad = \frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 15\ 380\ 937$$

više se isplati 6 od 45 jer ima manje kombinacija i prije bismo pogodili zeto

35. Od 12 košarkaša u igri je uvijek samo njih 5. Koliko ukupno ima takvih postava?

$$\binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792$$

poredak nije bitan

36. Izbornik nogometne reprezentacije mora od 22 nogometaša izabrati njih 11, ali za petoricu svojih favorita već je odlučio. Na koliko načina može izbornik izabrati momčad?

$$\binom{22-5}{11-5} = \binom{17}{6} = \ldots = 12\ 376$$

37. Na šahovskom turniru svaki je igrač odigrao sa svakim od preostalih jednu partiju. Ukupno je odigrano 78 partija. Koliko je šahista sudjelovalo u turniru?

n - broj šahista

$$\underbrace{\binom{n}{2}}_{} = 78$$

broj parova = broj partija

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2!} = 78 \quad /\cdot 2$$

$$n^2 - n = 156$$

$$n^2 - n - 156 = 0$$

$$_1n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+624}}{2}$$

$$_1n_2 = \frac{1 \pm 25}{2}$$

$$\underline{n_1 = 13} \qquad \cancel{n_2 = -12}$$

38. Koliko se hokejaških postava može napraviti od igrača ekipe koja ima 9 napadača, 5 braniča i 3 vratara, ako postavu čine 1 vratar, 2 braniča i 3 napadača?

9n i 5b i 3v

biramo 3n i 2b i 1v

to možemo na $\binom{9}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1}$

$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} \cdot \frac{5\cdot \cancel{4}}{\cancel{2}\cdot 1} \cdot \frac{\cancel{3}}{1} = 2520$$

39. U kutiji se nalazi 10 proizvoda, među kojima su 3 neispravna. Na koliko načina možemo odabrati 4 proizvoda iz kutije tako da među njima bude:

a) točno jedan neispravan,

b) barem jedan neispravan,

c) najviše dva neispravna?

$\boxed{3 \text{ neis.}, 7 \text{ ispr.}}^{10} \longrightarrow$ odabiremo 4

$\boxed{\text{čim odabiremo, poredak nije bitan, koristimo } \binom{n}{k}}$

a) 1 neisp. i 3isp. jer ih biramo 4

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3}$$

$$= 3 \cdot \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 105$$

b) barem 1 neisp:

1n i 3i ili 2n i 2i ili 3n i 1i ~~ili 4n~~ jer ih je 3 ukupno

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} + \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2} + \binom{3}{3} \cdot \binom{7}{1}$$

$$= 175$$

! ILI KOMPLEMENT:

suprotno:

barem 1 neisp. = sve kombinacije — niti jedan neispr.

0n i 4i

$$= \binom{10}{4} - \underbrace{\binom{3}{0}}_{1} \cdot \binom{7}{4}$$

$$= 175$$

c) najviše 2 neisp. $\overset{\text{pravilo komplementa}}{=}$ sve kombinacije — 3n i 1isp.

suprotno: točno 3 neispr.

0, 1, 2

kombinacije

$$= \binom{10}{4} - \binom{3}{3}\binom{7}{1}$$

$$= 203$$

DODATNO: Na koliko načina mogu izabrati 4 karte različitih vrijednosti iz snopa od 52 karte?

vrijednosti: As, kralj, dama, dečko, ..., 3, 2
po 4
ima ih 13 ukupno vrijednosti

boje: herc, pik, karo, tref
po 13
ima ih ukupno 4

1. način

1. karta bilo koja; 2. karta bez vrijednosti pre karte, tj. minus 4

$$\frac{\overbrace{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}^{}}{4!}$$

ovo računa poretke a ne želim ih pa dijelim sa 4! što je broj poredaka 4 karte

2. način

biram 4 vrijednosti; 1. vr.; 2. vr.

$$\binom{13}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}$$

40. Na koliko načina možemo iz snopa od 52 karte odabrati 5 tako da:

a) dobijemo sve karte iste boje,

ili $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5}$

herc ILI pik ILI karo ili tref

$$\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} = 5148$$

b) dobijemo par (točno dvije karte iste vrijednosti) : ostale tri moraju biti različite

b) dobijemo par (točno dvije karte iste vrijednosti) i ostale tri moraju biti različite vrijednosti od para i različite međusobno

tj. samo 1 par od 5 karata

biram 1 vrijednost

biram 2 unutar vrijednosti

3. karte različita od para

4. karte različite od 3.

5. različita od 4. vrijednosti

$$\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{48\cdot 44\cdot 40}{3!} = 1\,098\,240$$

c) dobijemo tris (točno tri karte iste vrijednosti) -> ostale različite od njih i međusobno

4. karte

$$\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\frac{48\cdot 44}{2!} = 54\,912$$

d) dobijemo poker (točno četiri karte iste vrijednosti)

5. karta

$$\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot 48 = 624$$

e) dobijemo ful (tri karte iste vrijednosti i dvije iste druge vrijednosti)

ostalo 12 vrijednosti

$$\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{4}{2} = 3744$$

f) dobijemo dva para (dvije karte iste vrijednosti, dvije iste druge vrijednosti i jedna karta različite vrijednosti od ostalih)?

5. karta

$$\frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot 44}{2!} = 123\,552$$