Klasični vjerojatnosni prostor

Klasični vjerojatnosni prostor je konačni vjerojatnosni prostor u kojem je **svaki ishod (elementarni događaj) jednako vjerojatan.**

Tada vjerojatnost događaja A računamo po formuli:

$$\boxed{P(A) = \frac{\textbf{broj POVOLJNIH ishoda (iz A)}}{\textbf{broj MOGUĆIH ishoda (iz } \Omega\textbf{)}}.} = \frac{m}{n}$$

Klasični vjerojatnosni prostor još prepoznajemo po tome kad kažemo da nešto radimo nasumično ili na slučajan način. Te riječi ukazuju da je svaki ishod pojave jednako vjerojatan.

12. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani broj od 1 do 12 djeliteljbroja 12?

broj mogućih

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ od 1 - 12 $\rightarrow n = 12$

vjerojatnost od $A = \{\text{djeliteli broja } 12\}$ $\rightarrow$ broj povoljnih $m = 6$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

13. Znamenke 1, 2, ..., 9 zapisane su u slučajnom poretku. Izračunaj vjerojatnost da se znamenka 2 pojavi neposredno nakon znamenke 1.

Ω $\rightarrow$ 1...9 poretci $\rightarrow$ broj mogućih $n = 9!$

$\Omega \rightarrow 1, \dots, 9$ poretci $\rightarrow$ broj mogućih $n = 9!$

$\boxed{n \text{ elemenata mogu poredati na } n! \text{ načina}}$

$A = \{2 \text{ iza } 1\} \rightarrow$ broj povoljnih $m = 8!$ poredaka

$\boxed{12}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow$ imamo 8 elemenata

blok = 1 element

!

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} = \frac{8!}{9!} = \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 9} = \frac{1}{9}$$

14. Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost događaja:
   a) A – {zbroj brojeva na kockama je 7 ili 11},
   b) B – {pala je barem jedna šestica},
   c) C – {produkt brojeva na kockama je neparan},
   d) D – {jedan broj na kocki dijeli drugi}?

2 kocke $\rightarrow \Omega \rightarrow$ broj mogućih $n = \underset{1.}{6} \cdot \underset{2.\ \text{kocka}}{6} = 36$

a) $A = \{\text{zbroj } 7 \text{ ili } 11\}$

$= \{16, 61, 25, 52, 43, 34, 65, 56\}$ broj povoljnih $m_A = 8$

$$\boxed{P(A) = \frac{m_A}{n}} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

b) $B = \{\text{barem jedna šestica}\}$ broj povoljnih $m_B = 36 - \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{bez šestice}} = 11$

komplement

b) $B = \{$barem jedna šestica$\}$ broj povoljnih $m_B = 36 - \underbrace{\underset{\not 6}{5} \cdot \underset{\not 6}{5}}_{\text{bez šestice}} = 11$

ili

ispisati $\{16, 26, 36, 46, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

$$\boxed{P(B) = \frac{m_B}{n}} = \frac{11}{36}$$

c) C – {produkt brojeva na kockama je neparan},

oba neparna $\{1, 3, 5\}$

povoljni $m_C = \underset{\{1,3,5\}}{3} \cdot 3 = 9$

ili ispisati

$\{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}$

$$\boxed{P(C) = \frac{m_C}{n}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

d) D – {jedan broj na kocki dijeli drugi} → 2 dijeli 6

→ netko od njih od drugog mora biti djelitelj

$D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16,$
$21, 22, 24, 26,$
$31, 33, 36,$
$41, 42, 44$
$51, 55,$
$61, 62, 63, 66\}$

povoljni $m_D = 22$

$$\boxed{P(D) = \frac{m_D}{n}} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

$$\boxed{P(D) = \frac{m_D}{n}} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

15. Simetrični novčić se baca 4 puta. Kolika je vjerojatnost događaja:

a) A – {pojavilo se točno jedno pismo},
b) B – {u drugom bacanju pojavilo se pismo},
c) C – {pojavilo se barem jedno pismo},
d) D – {pismo se pojavilo barem dva puta}?

$\Omega \to$ novčić 4 puta $\to$ broj mogućih $n = \underset{\{P,G\}}{\underline{2}} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^4 = 16$

a) $A = \{1\ P\}$ broj povoljnih $m_A = 4$

$= \{PGGG, GPGG, GGPG, GGGP\}$

$$\boxed{P(A) = \frac{m_A}{n}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

b) $B = \{$pismo u 2. bacanju$\}$ broj povoljnih $m_B = \underset{P,G}{\underline{2}} \cdot \underset{\{P\}}{\underline{1}} \cdot \underset{P,G}{\underline{2}} \cdot \underline{2} = 8$

ili ispisati...

$$\boxed{P(B) = \frac{m_B}{n}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

c) $C = \{$barem 1 P$\}$ broj povoljnih $m_C = \overset{\text{komplement}}{\underset{\text{svi}}{16}} - \underset{\text{bez pisama GGGG}}{1} = 15$

$$\boxed{P(C) = \frac{m_C}{n}} = \frac{15}{16}$$

d) D – {pismo se pojavilo barem dva puta}

komplement

svi − 1P − 0P

broj povoljnih $m_D = 16 - \underset{a)}{4} - \underset{GGGG}{1} = 11$

$$\boxed{P(D)=\frac{m_D}{n}} = \frac{11}{16}$$

---

ili smo mogli ispisati svih 16 iz Ω i tamo tražiti za $A, B, ..$

$\Omega = \{PPPP, PPPG, PPGP, PGPP, GPPP,$
$PPGG, GGPP, PGPG, GPGP, GPPG, PGGP,$
$GGGP, GGPG, GPGG, PGGG, GGGG\}$

Sa 2P i 2G ima ih $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$

16. 6 bijelih, 4 crne i 2 plave kuglice redaju se na sreću. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije biti bijele?

→ znači, svaki rezultat jednako vjerojatan, znači $P = \frac{m}{n}$

6 B, 4 C, 2 P redamo na sreću → Ω → broj mogućih poredaka $n = \frac{12!}{6!\cdot 4!\cdot 2!}$

↓ ima ih 12

↓ permutacije s ponavljanjem !!!

$A = \{\text{prve dvije bijele}\}$ → broj povoljnih $m = \frac{10!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$

↓ ostalo 4B, 4C, 2P

ukupno 10

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\frac{10!}{4!\cdot 4!\cdot \cancel{2!}}}{\frac{12!}{6!\cdot \cancel{4!}\cdot \cancel{2!}}} = \frac{10!\cdot 6!}{4!\cdot 12!} = \frac{\cancel{10!}\cdot \cancel{4!}\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{4!}\cdot \cancel{10!}\cdot 11\cdot \cancel{12}_2} = \frac{5}{22}$$

17. U kutiji imamo 6 žutih i 4 modre kuglice. Ako slučajno izvučemo dvije kuglice, kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A – {obje kuglice su žute},

b) B – {kuglice su različitih boja},

c) C – {kuglice su iste boje}?

$p = \frac{m}{n}$

KAD izvlačimo (biramo) onda koristimo $\binom{n}{k}$

$\boxed{6ž, 4m}$ ukupno 10 → izvučemo 2 ⟹ Ω → broj mogućih kombinacija $n = \binom{10}{2} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9}{\cancel{2} \cdot 1} = 45$

a) $A = \{\text{obje } ž\}$ → broj povoljnih $m_A = \binom{6}{2} = \frac{\cancel{6}^{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 1} = 15$ (2ž)

$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

b) $B = \{\text{kuglice različite}\}$ → broj povoljnih $m_B = \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 24$ (1ž i 1m)

$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

c) $C = \{\text{kuglice iste boje}\}$ → broj povoljnih $m_C = \binom{6}{2} + \binom{4}{2}$ (2ž ili 2m)

$m_C = 15 + \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3}{\cancel{2}} = 21$

$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

---

2. način $C = \overline{B}$ $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$

18. Iz snopa od 52 karte izvlače se dvije. Kolika je vjerojatnost da će među njima biti:

a) Dvije pik karte,

b) Jedna pik i jedna herc karta,

c) Dva asa,

d) Najviše jedan as?

$\boxed{52}$ karte → izvlačimo 2 ⇒ Ω broj mogućih $n = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{2 \cdot 1}$

$n = 1326$

a) $A = \{2 \text{ pik}\}$

4 boje: 52 ⇒ 13 herc + 13 pik + 13 karo + 13 tref

$m_A = \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}} = 78$

$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{17}$

b) $B = \{1 \text{ pik i } 1 \text{ herc}\}$

$m_B = \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 169$

$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{13}{102}$

c) $C = \{2 \text{ asa}\}$

13 vrijednosti: 52 ⇒ 4 asa, 4 kralja, ..., 4 trojke, 4 dvojke

$m_C = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

$P(C) = \frac{m_C}{n} =$

d) $D = \{\text{najviše } 1 \text{ as}\}$ → $\underbrace{1 \text{ as i } 1 \text{ ne-as}}_{\text{! 2 ukupno !}}$ ili $\underbrace{0 \text{ aseva i } 2 \text{ ne-asa}}_{\text{! 2 ukupno !}}$

d) $D = \{\text{najviše 1 as}\} \to$ $\overbrace{1 \text{ as } (i) \ 1 \text{ ne-as}}$ | ili | 0 aševa (i) 2 ne-asa

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{1} + \underbrace{\binom{4}{0}}_{1} \cdot \binom{48}{2}$$

$$= 1320$$

---

ili komplementom = svi − 2 asa

$$= \binom{52}{2} - \binom{4}{2} = 1320$$

20. U šest kutija na slučajan način se raspoređuju 4 kuglice. Kolika je vjerojatnost da će u prve četiri kutije biti točno po jedna kuglica?

6 kutija, 4 kuglice $\to \Omega \to$ broj ishoda $n = \underset{1.}{\underline{6}} \cdot \underset{2.}{\underline{6}} \cdot \underset{3.}{\underline{6}} \cdot \underset{4.}{\underline{6}} = 6^4$ kuglica

(kao 6 postaja, 4 putnika)

$A = \{\text{u prve 4 kutije po jedna}\} \to$ broj povoljnih $m = \underset{1.}{\underline{4}} \cdot \underset{2.}{\underline{3}} \cdot \underset{3.}{\underline{2}} \cdot \underset{4.}{\underline{1}} = 4!$

1. 2. 3. 4. kutija ili kuglica

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4!}{6^4} = \ldots = \frac{1}{54}$$