Vježbe 7

12. studenog 2025. 11:28

$$\boxed{P(A\overset{\text{ako}}{|}B) = \frac{P(A\overset{i}{\cap}B)}{P(B)}}$$

ili

$$\boxed{P(B\overset{\text{ako}}{|}A) = \frac{P(A\overset{i}{\cap}B)}{P(A)}}$$

3. Iz skupa {1, 2, ..., 99, 100} slučajno je izabran jedan broj. Kolika je vjerojatnost da je to paran broj ako je poznato da je izabran broj djeljiv s 3?

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\} \to 1$ broj

$A = \{$izabran paran broj$\}$

ako znamo $B = \{$izabran djeljiv s 3$\}$ → ima ih 33

$1\cdot 3, 2\cdot 3, 3\cdot 3, 4\cdot 3 \ldots 33\cdot 3$

$3, 6, 9, 12 \ldots, 99$

$P(B) = \frac{33}{100}$ povoljnih

$P(A\overset{\text{ako}}{|}B) = ?$

$A\overset{i}{\cap}B = \{$paran i djeljiv s 3$\}$

$= \{$djeljiv se 6$\}$

$6, 12, 18, \ldots, 96$ → ima ih 16

$16 \cdot 6$

$P(A\cap B) = \frac{16}{100}$

$$P(A\overset{\text{ako}}{|}B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{16}{\cancel{100}}}{\frac{33}{\cancel{100}}} = \frac{16}{33}$$

4. U kutiji imamo 12 bijelih kuglica od čega 5 s oznakom *x*, a 7 s oznakom *y*, i 14 crnih kuglica od čega 9 s oznakom *x*, a 5 s oznakom *y*. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući kuglicu s oznakom *x* ako je poznato da je izvučena bijela kuglica?

$$\boxed{\begin{array}{l} 12\,B \\ 14\,C \end{array}} \begin{array}{l} \to 5x \text{ i } 7y \\ \to 9x \text{ i } 5y \end{array}$$

$A = \{$ izvučene $x\}$

ako $B = \{$ izvučene bijele$\}$

$A \cap B = \{$ izvučene x i bijele$\}$ (i)

$P(B) = \dfrac{12 \text{ povoljnih}}{26 \text{ mogućih}}$

$P(A \cap B) = \dfrac{5}{26}$

$$P(A \overset{\text{ako}}{|} B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{\cancel{26}}}{\frac{12}{\cancel{26}}} = \frac{5}{12} \,//$$

Vjerojatnost presjeka dvaju događaja:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)}}$$ ili

odnosno, ako zamijenimo ulogu slova A i B imamo $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).}$

5. U kutiji se nalaze 4 crvene i 3 plave kuglice. Ne gledajući u kutiju tri puta iz nje izvučemo po jednu kuglicu bez vraćanja. Kolika je vjerojatnost
   a) Da su prve dvije kuglice crvene
   b) Da su sve tri kuglice crvene
   c) Da je prva kuglica plava, a druge dvije crvene
   d) Da niti jednom nije izvučena crvena kuglica?

$\boxed{4c, 3p}$ → 3 izvlačimo jednu po jednu **BEZ VRAĆANJA**

$C_1 = \{$ prva izvučena je crvena$\}$

$C_2 = \{$ druga —|— crvena$\}$

$C_3 = \{$ treća —|— $\}$

$\overline{C_1} = \{$ prva plava$\}$ ili P_1

⋮

BEZ vraćanja

1.c BEZ vrać. → ostalo 3c od 6

a) $P(C_1 \overset{i}{\cap} C_2) = \frac{\cancel{4}^2}{7} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} = \frac{2}{7}$

$= P(C_1) \cdot \overbrace{P(C_2|C_1)}^{ako}$

ostalo 3 od 6 → ostalo 2 od 5

b) $P(C_1 \overset{i}{\cap} C_2 \cap C_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$

$\boxed{4c, 3p}$

$= P(C_1) \cdot P(C_2 \overset{ako}{|} C_1) \cdot P(C_3 \overset{ako}{|} C_1 \overset{i}{\cap} C_2)$

c) Da je prva kuglica plava, a druge dvije crvene

$P(\overline{C_1} \overset{i}{\cap} C_2 \overset{i}{\cap} C_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4c}{6} \cdot \frac{3}{5}$

d) Da niti jednom nije izvučena crvena kuglica

$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_2}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \ldots$

6. Izračunajte vjerojatnosti u prethodnom zadatku ako se kuglica nakon izvlačenja vraća u kutiju.

$\boxed{4c, 3p}$ → 3, jedna po jedna, S VRAĆANJEM

a) Da su prve dvije kuglice crvene
b) Da su sve tri kuglice crvene
c) Da je prva kuglica plava, a druge dvije crvene
d) Da niti jednom nije izvučena crvena kuglica?

s vraćanjem

a) $P(C_1 \overset{i}{\cap} C_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$

$= P(C_1) \cdot P(C_2)$ ⇒ C_1 i C_2 nezavisni događaji kad vraćamo kuglice !?!

$P(C_1) \cdot P(C_2)$

kad vraćamo kuglice !!

b) $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$

c) $P(\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$

d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}$

Nezavisnost događaja

Događaji A i B su **nezavisni** ako vrijedi:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ili} \quad P(B|A) = P(B).$$

Značі, dva događaja su nezavisna ako pojavljivanje jednog događaja ne utječe/ne mijenja vjerojatnost drugog događaja.

!

Lako se vidi da u tom slučaju **ako su A i B nezavisni vrijedi**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

!

I obrnuto, **ako vrijedi jednakost $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, tada zaključujemo da su A i B nezavisni.**

za ispitivanje nezavisnosti

7. Bacamo tri simetrična novčića. Zadani su događaji
A – {u sva tri bacanja isti ishod}
B – {pismo se pojavilo najviše dva puta}
C – {pismo se pojavilo barem dva puta}.
Koji su parovi događaja nezavisni?

3 novčića $\rightarrow$ mogućih $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$A = \{PPP, GGG\}$ $\qquad P(A) = \frac{2}{8}$

$B = \{PPG, PGP, GPP, GGP, GPG, PGG, GGG\}$ $\qquad P(B) = \frac{7}{8}$

barem

$C = \{PPG, PGP, GPP, PPP\}$ $\qquad P(C) = \frac{4}{8}$

$A \overset{i}{\cap} B = \{GGG\}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$A \overset{i}{\cap} C = \{PPP\}$ $\quad P(A \cap C) = \frac{1}{8}$

$B \cap C = \{PPG, PGP, GPP\}$ $\quad P(B \cap C) = \frac{3}{8}$

ispitivanje nezavisnosti:

A i B

$$P(A \overset{i}{\cap} B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{1}{8} = \frac{2}{8} \cdot \frac{7}{8}$$

$$0.125 \neq 0.218$$

A i B NISU NEZAVISNI !

A i C

$$P(A \cap C) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(C)$$

$$\frac{1}{8} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{4}}{8}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \checkmark$$

A i C SU NEZAVISNI !

B i C

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$\frac{3}{8} \neq \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{8}$$

B i C NISU NEZAVISNI !

---

3 događaja A, B i C su NEZAVISNI ako vrijedi:

$$P(A \overset{i}{\cap} B) = P(A) \cdot P(B)$$

i $\quad P(A \overset{i}{\cap} C) = P(A) \cdot P(C)$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

i $\quad P(A \overset{i}{\cap} B \overset{i}{\cap} C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$!

Ako znamo da su nezavisni :

Lako se vidi da u tom slučaju **ako su A i B nezavisni vrijedi**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

!

8. Neka je $P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8, P(B) = p$. Odredite p tako da vrijedi da su A i B nezavisni.

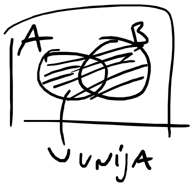
$P(A) = 0.4$

$P(A \cup B) = 0.8$

$P(B) = p = ?$

! A i B nezavisni ! $\Rightarrow$ vrijedi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

znamo $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{nezavisnost}}}$



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$!

$0.8 = 0.4 + p - 0.4 \cdot p$

$-p + 0.4p = 0.4 - 0.8$

$-0.6p = -0.4 \quad | : (-0.6)$

$p = \frac{2}{3}$

9. Vjerojatnosti pojavljivanja triju nezavisnih događaja su 2/3, 3/5, 1/2.
   a) Kolika je vjerojatnost da se ostvari barem jedan od njih?
   b) Kolika je vjerojatnost da se ostvari točno jedan od njih?

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$P(A) = \frac{2}{3}$ $\qquad P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ $\qquad P(\bar{C}) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{3}{5}$ $\qquad A, B, C$ NEZAVISNI !

$P(C) = \frac{1}{2}$

---

a) $\boxed{\overset{\text{vjeroj}}{P}(\text{barem jedan se ostvario}) = 1 - P(\text{niti jedan})}$

KOMPLEMENT

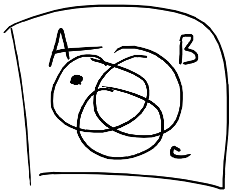
$$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

$$\overset{\text{NEZAV.}}{=} 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{14}{15}$$

b) Kolika je vjerojatnost da se ostvari točno jedan od njih?



točno 1:

$$= P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \overset{\text{ili}}{+} P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \overset{\text{ili}}{+} P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

disjunktni

nezav.

$$= P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

10. Strijelac gađa metu dok je ne pogodi. Vjerojatnost pogotka u svakom gađanju je 0.6. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:
   a) Meta je pogođena u trećem pokušaju
   b) Meta je pogođena u prva tri pokušaja
   c) Meta je pogođena nakon četvrtog pokušaja.

strijelac gađa <u>DOK</u> ne pogodi

vjerojatnost pogotka uvijek 0.6 → gađanja <u>NEZAVISNA</u>

$A_i = \{\text{pogodak u } i\text{-tom gađanju}\}, \quad i = 1, 2, \ldots$

$$\Omega = \{ \underset{\text{pogodak iz prve}}{A_1},\ \underset{\text{iz druge}}{\bar{A}_1 \overset{i}{\cap} A_2},\ \underbrace{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3}_{\text{u trećem}},\ \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4, \ldots \}$$

a) $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \overset{\text{nez.}}{=} P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.6$

$= 0.096$

b) Meta je pogođena u prva tri pokušaja

$\overset{\text{nez.}}{=} P(A_1) \overset{\text{ili}}{+} P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \overset{\text{ili}}{+} P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3)$

$= 0.6 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.6$

$= 0.936$

c) Meta je pogođena nakon četvrtog pokušaja.

$P(\text{nakon } 4.) = 1 - P(\underset{\text{u prve 3 + 4.}}{\text{u prva 4}})$

$= 1 - (0.936 + 0.4^3 \cdot 0.6)$

$= 0.025$

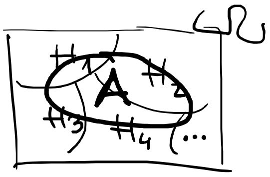
$= 0{,}0256$

2. način — nakon 4. pogotka, znači u prva 4 gađanja $\underbrace{\text{NEMA POGOTKA}}_{0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4}$!

$= 0{,}0256$

FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI

- najčešće u dva dijela se događa "priča"
- u prvom dijelu hipoteze $H_1, H_2, \ldots$
- tražimo $P(A)$ u 2. dijelu



$$\boxed{P(A) = P(H_1)\cdot P(A \overset{ako}{|} H_1) + P(H_2)\cdot P(A \overset{ako}{|} H_2) + \ldots}$$

11. U jednoj kutiji se nalaze 3 crne i 2 plave, a u drugoj kutiji 4 crne i 2 plave kuglice. Odabiremo na sreću jednu kuglicu iz prve kutije i prebacimo je u drugu. Kolika je vjerojatnost da će kuglica izvučena iz druge kutije biti plava?

1. kutija: $\boxed{3c, 2p}$ $\xrightarrow{\text{o}}$ 2.: $\boxed{4c, 2p}$ $\longrightarrow$ $A = \{$ iz 2. kutije izvučena plava $\}$

$P(A) = ?$

1. korak: prebacili ...

$H_1 = \{$ prebacili crvenu $\}$

$H_2 = \{$ prebacili plavu $\}$ 2. kutija

$H_1 = \{$ prebaciti crvenu $\}$

$H_2 = \{$ prebaciti plavu $\}$

$P(H_1) = \frac{3}{5}$

$P(H_2) = \frac{2}{5}$

zbroj 1 ✓

2. kutija

$\boxed{5c, 2}p$

plave

ako

$P(A \mid H_1) = \frac{2}{7}$

plave ako

$P(A \mid H_2) = \frac{3}{7}$

$\boxed{4c, 3p}$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$$

$$= \frac{12}{35}$$