Vježbe 8

19. studenog 2025. 11:35

12. U skupini od 10 strijelaca nalaze se 4 izvrsna i 6 dobrih. Vjerojatnost pogotka za izvrsne strijelce je 0.9, a za dobre 0.7. Iz skupine na sreću biramo jednog strijelca. Kolika je vjerojatnost da će on pogoditi metu? $\underbrace{\text{će on pogoditi metu}}_{A}$

Nastavljamo s formulom potpune vjerojatnosti:

$$\boxed{P(A) = P(H_1)\cdot P(A\overset{\text{ako}}{|}H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + \dots}$$

$$\boxed{P(H_1) + P(H_2) + \dots = 1}$$

$\boxed{4i, 6d}$

pogodak 0.9 | 0.7

1. biramo strijelce

$H_1 = \{\text{izabrali izvrsnog}\}$

$H_2 = \{\text{izabrali dobrog}\}$

2. korak

$A = \{\text{strijelac pogodio}\}$

$P(A) = ?$

$$\left.\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{4}{10} \\ P(H_2) &= \frac{6}{10} \end{aligned}\right\} \text{Suma } 1$$

$P(A\overset{\text{ako}}{|}H_1) = 0.9$

$P(A\overset{\text{ako}}{|}H_2) = 0.7$

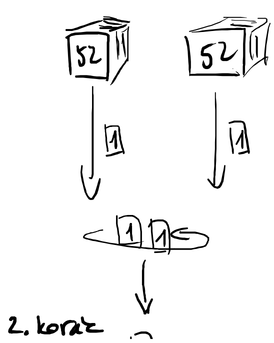
$$\boxed{P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)}$$

$$P(A) = \frac{4}{10}\cdot 0.9 + \frac{6}{10}\cdot 0.7$$

$$P(A) = 0.78$$

13. DZ

14. U dva snopa karata nalaze se 52 karte sa po 4 asa. Izvučemo na sreću po jednu kartu iz svakog snopa, zatim izvučene karte pomiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?



→ 1. korak

nezavisnost

$H_1 = \{As \text{ i } As\}$

$H_2 = \{\overline{As} \text{ i } As\}$

$H_3 = \{As \text{ i } \overline{As}\}$

$$P(H_1) = \frac{\overset{\text{asa}}{4}}{52}\cdot\frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

$$P(H_2) = \frac{\overset{\text{neasova}}{48}}{52}\cdot\frac{4}{52} = \frac{12}{169}$$

2. korak otkrijemo $\boxed{1}$

$A = \{\text{otkriven as}\}$

$P(A) = ?$

$H_3 = \{As \ i \ \overline{As}\}$

$H_4 = \{\overline{As} \ i \ \overline{As}\}$

$P(H_2) = \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{12}{169}$

$P(H_3) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} = \frac{12}{169}$

$P(H_4) = \frac{48}{52} \cdot \frac{48}{52} = \frac{144}{169}$

Suma 1

ako

$P(A|H_1) = 1 \quad = 100\%$

ako

$P(A|H_2) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_3) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_4) = 0$

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots$

$P(A) = \frac{1}{169} \cdot 1 + \frac{12}{169} \cdot \frac{1}{2} + \frac{12}{169} \cdot \frac{1}{2} + \frac{144}{169} \cdot 0$

$P(A) = \frac{1}{13}$ //

Bayesove formule

→ pretpostavke: A se ostvario

→ pitamo se: $P(H_1|A)$, $P(H_2|A) = ?$ ...

(ako 1, ako 2)

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}}$$

formula potpune vj.

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots$

15. Jedna trgovina nabavlja DVD pržilice od 2 proizvođača P_1 i P_2. P_1 doprema 1000 komada, od čega 5% s greškom, a P_2 700 komada, od čega 2% s greškom. Kolika je vjerojatnost da
    a) slučajno odabrani proizvod ima grešku
    b) je slučajno odabrani proizvod, koji ima grešku, od proizvođača P_1?

P_1 P_2

1000 700

greška 5% 2%

1. korak: biramo proizvod

$H_1 = \{$ odabrali od $P_1\}$

$H_2 = \{$ odabrali od $P_2\}$

$P(H_1) = \frac{1000}{1700}$

$P(H_2) = \frac{700}{1700}$

suma 1 ✓

2. korak

$A = \{$ proizvod ima grešku$\}$

a) $P(A) = ?$

$P(A|H_1) = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$ (ako)

$P(A|H_2) = 2\% = 0.02$ (ako)

$$\boxed{P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)}$$

$$P(A) = \frac{1000}{1700}\cdot 0.05 + \frac{700}{1700}\cdot 0.02$$

$$P(A) = \frac{16}{425} = 0.038$$

b) vjeroj. da je slučajno odabrani proizvod, $\underbrace{\text{koji ima grešku}}_{A}$, od proizvođača $\underline{P_1}$? H_1

ako znamo

$$P(H_1|A) = ?$$

Bayes

$$\boxed{P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}} = \frac{\frac{1000}{1700}\cdot 0.05}{\frac{16}{425}} = \frac{25}{32} = 0.78$$

16. Jedan tip proizvoda izrađuje se na 4 stroja. Na stroju S_1 izrađuje se 40% proizvoda od čega je 0.1% škarta, na stroju S_2 30% i od toga 0.2% škarta, na S_3 20% sa 0.25% škarta i na S_4 10% sa 0.5% škarta.
    a) Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani proizvod bude škart?
    b) Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani proizvod, koji nije škart, izrađen na stroju S_1?

S_1	S_2	S_3	S_4	
40%	30%	20%	10%	
				škart

40% 30% 20% 10%

0,1% 0,2% 0,25% 0,5% škart (loš)

1. korak biramo proizvod

$H_1 = \{$odabran sa $S_1\}$

$H_2 = \{$ -"- $S_2\}$

$H_3 = \{$ -"- $S_3\}$

$H_4 = \{$ -"- $S_4\}$

2. korak

$A = \{$proizvod je škart$\}$

a) $P(A) = ?$

$P(H_1) = 40\% = 0.4$

$P(H_2) = 30\% = 0.3$

$P(H_3) = 20\% = 0.2$

$P(H_4) = 10\% = 0.1$

suma 1

$P(A|H_1) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$

$P(A|H_2) = 0.2\% = 0.002$

$P(A|H_3) = 0.25\% = 0.0025$

$P(A|H_4) = 0.5\% = 0.005$

$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + \dots$

$P(A) = 0.4\cdot 0.001 + 0.3\cdot 0.002 + 0.2\cdot 0.0025 + 0.1\cdot 0.005$

$P(A) = 0.002$ //

$\cancel{P(H_1|\bar{A}) = 1 - P(H_1|A)}$

b) Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani proizvod, koji nije škart, izrađen na stroju S_1?

ako

$P(H_1|\bar{A}) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H_1)\cdot P(\bar{A}|H_1)}{P(\bar{A})}$

$= \frac{0.4\cdot 0.999}{0.998}$

$= 0.4004$

$\boxed{P(\bar{A}|H_1) = 1 - P(A|H_1)}$

$= 1 - 0.001$

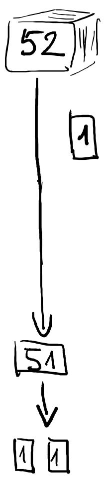
$= 0.999$

$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

$= 1 - 0.002 = 0.998$

17. Dz

18. Iz snopa od 52 karte izvučena je jedna karta. Nakon toga, izvučene su još dvije i pokazalo se da su obje karte pik boje. Kolika je vjerojatnost da je i prva karta pik boje?



1. korak

$H_1 = \{$ 1. karta je pik $\}$

$H_2 = \{$ 1. NIJE pik $\}$

desilo se

$A = \{$ obje pik $\}$

$$P(H_1 \overset{\text{ako}}{|} A) = ?$$

$$P(H_1) = \frac{13^{\text{pikova}}}{52}$$

$$P(H_2) = \frac{39}{52}$$

suma 1 ✓

ostalo 12 pikova od 51 karte

$$P(A \overset{\text{ako}}{|} H_1) = \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50}$$

1. pik i 2. pik

$$P(A | H_2) = \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50}$$

ostalo 13 pikova od 51

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50} \\ &= \frac{1}{17} \end{aligned}$$

$$P(H_1 \overset{\text{ako}}{|} A) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50}}{\frac{1}{17}} = \frac{11}{50}$$

19. Dz

20. U prvoj kutiji su 2 bijele i 1 crna kuglica, a u drugoj 1 bijela i 5 crnih kuglica. Iz prve kutije su na sreću odabrane dvije kuglice i prebačene u drugu kutiju, a zatim je iz druge kutije na sreću izvučena bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je u prvoj kutiji ostala samo crna kuglica?

znamo A → Bays

2\. korak

$\boxed{2b, 1c} \xrightarrow{o\ o} \boxed{1b, 5c} \xrightarrow{o}$ $A = \{\text{izvučena bijela}\}$

1\. prebacimo 2

$H_1 = \{\text{prebačene 2 bijele}\}$

$H_2 = \{\text{prebačene 1b i 1c}\}$

ako

$$P(H_1 | A) = ?$$

2b

$$P(H_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

ili

poredak

1.b i 2.b

$$\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{3}$$

1b i 1c

$$P(H_2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

ili

poredak

1.b i 2.c ILI 1.c i 2.b

$$\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{2}{3}$$

sum 1 sum 1

bijela, 3b, 5c

$$P(A | H_1) = \frac{3}{8}$$

bijela, 2b, 6c

$$P(A | H_2) = \frac{2}{8}$$

$$P(A) = \dots$$

$$P(H_1 | A) = \dots$$

ostala crna

$$P(H_1 | A) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{\underbrace{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2)}_{P(A)}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{8}} = \frac{3}{7}$$

DZ

13. Iz skupa S = {1, 6, 7, 8, 9} slučajno se bira jedan broj, a iz preostalog skupa još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da $\underbrace{\text{drugi izabrani broj bude neparan?}}_{A}$

$S = \{1, 6, 7, 8, 9\}$

↓ 1. korak: biram broj

ostane S'

2. korak: opet biramo broj

$A = \{\text{drugi neparan}\}$

$H_1 = \{\text{izabrali paran}\}$

$H_2 = \{\text{izabrali neparan}\}$

$P(H_1) = \frac{2}{5}$ $\qquad P(H_2) = \frac{3}{5}$

zbroj 1 ✓

$S' = \{1p, 3n\}$ $\qquad P(A \mid H_1) = \frac{3}{4}$

$S' = \{2p, 2n\}$ $\qquad P(A \mid H_2) = \frac{2}{4}$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

$$= 0.6$$

17. Imamo dvije grupe strijelaca, G_1 i G_2. U grupi G_1 su 2 strijelca i svaki pogađa s vjerojatnošću 0.6, au G_2 su 3 strijelca i svaki gađa s vjerojatnošću 0.4.
   a) Je li vjerojatnije da slučajno odabrani strijelac pogodi ili promaši?
   b) Je li vjerojatnije da slučajno odabrani strijelac, koji je pogodio u cilj, pripada grupi G_1 ili G_2?

	G_1	G_2
	2	3
pogodak	0.6	0.4

1. korak: biramo strijelca → $H_1 = \{\text{odabran iz } G_1\}$, $H_2 = \{\text{odabran iz } G_2\}$

↓

2. korak: on gađa

$A = \{\text{pogodak}\}$

$\bar{A} = \{\text{promašaj}\}$

$P(H_1) = \frac{2}{5}$ } suma 1 ✓

pogodak ako G_1

$P(A \mid H_1) = 0.6$

$A = \{ \text{promašaj} \}$

$$P(H_1) = \frac{2}{5}$$
$$P(H_2) = \frac{3}{5}$$
suma 1 ✓

pogodak

$$P(A | H_1) = 0.6$$
$$P(A | H_2) = 0.4$$

a) pogodak

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2)$$
$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot 0.6 + \frac{3}{5} \cdot 0.4$$
$$P(A) = 0.48$$

promašaj

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.48 = 0.52$$ → vjerojatniji promašaj

b) Je li vjerojatnije da slučajno odabrani strijelac, koji je pogodio u cilj, pripada grupi G_1 ili G_2?

$$P(H_1 | A) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 0.6}{0.48} = 0.5$$

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 0.4}{0.48} = 0.5$$

$$\left[\begin{array}{l} P(H_1) + P(H_2) = 1 \\ P(H_1 | A) + P(H_2 | A) = 1 \end{array} \right]$$

19. U dvije od tri jednake pregrade (kutije) nalaze se 2 crne i 2 bijele kuglice, a u trećoj 5 bijelih i 1 crna. Iz na sreću odabrane pregrade izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je izvučena iz treće pregrade?

| 2c, 2b | 2c, 2b | 5b, 1c |

1. korak: odabiremo pregradu

$H_1 = \{ \text{odabrali 1. pregradu} \}$

$H_2 = \{ \text{– || – 2. – || –} \}$

$H_3 = \{ \text{– || – 3. – || –} \}$

2. korak: biramo kuglicu

poznato

$A = \{ \text{izvučena bijela} \}$

$$P(H_1) = \frac{1}{3}$$
$$P(H_2) = \frac{1}{3}$$
$$P(H_3) = \frac{1}{3}$$
suma 1 ✓

bijela ako 1. pregrada

$$P(A | H_1) = \frac{2}{4}$$
$$P(A | H_2) = \frac{2}{4}$$
$$P(A | H_3) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}$$
$$= \frac{11}{18}$$

$$P(H_3|A) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{5}{\cancel{6}}}{\frac{11}{\cancel{18}}} = \frac{5}{11}$$

DZ

21. Dva igrača bacaju simetričnu kocku. Ako je prvi dobio veći broj, kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 6?

2 kocke → $6\cdot 6 = 36$ rezultata

$A = \{$prvi dobio 6$\}$

desio se $B = \{$prvi dobio veći broj$\}$

$$P(A|\overset{\text{ako je}}{B}) = ?$$

$$B = \{21, 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65\}$$

$$P(B) = \frac{15}{36}$$

$$A \overset{i}{\cap} B = \{\text{prvi } 6 \text{ i prvi veći broj}\} = \{61, 62, 63, 64, 65\}$$

$$P(A\cap B) = \frac{5}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{\cancel{5}^{1}\cdot\cancel{36}}{\cancel{15}_{3}\cdot\cancel{36}} = \frac{1}{3}$$

---

2. način: s Bayesom

igrači bacaju svaki svoju kocku

$H_1 = \{$na prvoj kocki pao broj 1$\}$ $\quad P(H_1) = \frac{1}{6}$

$H_2 = \{$na prvoj —||— 2$\}$ $\quad P(H_2) = \frac{1}{6}$

$H_3 = \{$ —||— 3$\}$ $\quad \vdots$

$H_4 = \{$ —||— 4$\}$

$H_5 = \{$ —||— 5$\}$

$H_6 = \{$ —||— 6$\}$ $\quad P(H_6) = \frac{1}{6}$

$\Downarrow$ $H_4 = \{$ — " — $4\}$
$H_5 = \{$ — " — $5\}$
$H_6 = \{$ — " — $6\}$ $P(H_6) = \frac{1}{6}$

gledamo što su dobili
$A = \{$prvi dobio veći broj$\}$

$P(\underset{=}{A} \overset{\text{ako}}{|} H_1) = 0$

$P(\underset{=}{A} | H_2) = \frac{1}{6}$

na prvoj 2 → znači da bi na prvoj bio veći broj (A) mora se desiti par 21, tj. 1 je mogućnost na 2. umjesto od 6

$P(\underset{=}{A} | H_3) = \frac{2}{6}$

na prvoj 3 → znači za A je povoljno 1 ili 2 da bude na 2. kocki pa ima 2 od 6 povoljnih

$P(A | H_4) = \frac{3}{6}$

na prvoj 4 → pa na drugoj mora biti 1, 2 ili 3

$P(A | H_5) = \frac{4}{6}$

5 na prvoj pa na drugoj treba biti 1, 2, 3 ili 4

$P(A | H_5) = \frac{5}{6}$

na prvoj 6, ako prvi veći broj

$$P(H_6 | A) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H_6) \cdot P(A | H_6)}{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + \ldots + P(H_6) \cdot P(A | H_6)}$$

$$= \ldots$$
$$= \frac{1}{3}$$